Untersuchungen
über Flächen 4. Ordnung
mit einer doppelten Geraden.

Inaugural-Dissertation,

welche

nebst den beigefügten Thesen

mit Genehmigung der hohen

philosophischen Fakultät der Universität Breslau

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

am Donnerstag, den 4. Februar 1904, vormittags 11 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich verteidigen wird

Fritz Zimmermann
aus Posen.

AGAD.
LUCO.BAT.
BIBL.

Opponenten:

Herr Dr. phil. **Waldemar Jaeckel,**
Herr cand. phil. **Erich Fraenkel.**

Göttingen 1904.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kaestner.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543101_0039

Meinem Vater.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

§ 1. Die 16 einfachen Geraden auf den F_1^4 2

§ 2. Spezialfälle der F_1^4 mit mehr als 16 einfachen Geraden . . 7

§ 3. Die Kegelschnitte auf der F_1^4 11

§ 4. Die K-Dupel auf der F_1^4 20

§ 5. Die K-Tripel auf der F_1^4 27

§ 6. Die K-Quadrupel 36

§ 7. Die Systeme von windschiefen Kegelschnitten K 41

§ 8. Die 448 einzelnen kubischen Raumkurven R^3 auf der Fläche 48

§ 9. Die 128 Büschel von Raumkurven 3. Ordnung auf der F_1^4 . 55

§ 10. Die Raumkurven 4. Ordnung der Fläche 62

§ 11. Erzeugung einer F_1^4 durch die Schnittkurven entsprechender Flächen aus 2 zu einander projektiven Flächenbüscheln 2. Ordnung 65

§ 12. Eindeutige Abbildungen der Fläche auf eine Ebene 68

Einleitung.

Der Mannigfaltigkeitsgrad der Flächen 4. Ordnung ist 34 [1]). Nach M. Noether [2]) ist nun für eine Fläche n ter Ordnung der Besitz einer gegebenen Geraden als einer r-fachen Geraden gleichbedeutend mit der Erfüllung von $\frac{r(r+1)}{2 \cdot 3}(3n-2r+5)$ linearen Bedingungen.

1) Es gibt also $\infty^{34-13} = \infty^{21}$ Flächen 4. Ordnung, welche eine gegebene Gerade zur Doppelgeraden haben und daher im Raume $\infty^{21+4} = \infty^{25}$ biquadratische Flächen mit einer doppelten Geraden.

Diese Flächen sind mittels analytischer Methoden und mit Hülfe einer Abbildung von Clebsch im ersten Bande der Mathematischen Annalen behandelt worden. Zu den gleichen Resultaten ist R. Sturm auf synthetischem Wege und ohne Benutzung von Abbildungen gelangt, wie er im 4. Bande der Mathematischen Annalen mitgeteilt hat, doch sind dieselben hier fast ohne Beweise angegeben. Diese zu liefern soll meine Hauptaufgabe in der vorliegenden Abhandlung sein. Ausserdem aber bespreche ich in § 2 noch spezielle Arten der genannten Flächen und im letzten Abschnitt die von Clebsch benutzte Abbildung, sowie eine andere Abbildung, auf welche mich Herr Professor Sturm

---

1) Vgl. Cremona, Oberflächen, Artikel 18 Anm.

2) Siehe Mathematische Annalen Band 3 Seite 177 letzter Absatz.

aufmerksam gemacht hat. Die von mir benutzte Literatur habe ich in Anmerkungen und im Literaturverzeichnis am Schluss angeführt.

Indem ich mich der Sturm'schen Bezeichnungsweise bediene, will ich im folgenden durch das Zeichen F_1^4 immer eine Fläche 4. Ordnung mit einer doppelten Geraden darstellen.

§ 1.

Die 16 einfachen Geraden auf den Flächen vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden.

1. Ist d eine beliebige Gerade des Raumes, und sind ε, ε', ε'' 3 beliebige Ebenen, so schneiden die ∞^{21} Flächen F_1^4, welche die d zur Doppelgeraden haben, in diese 3 Ebenen ∞^{21} verschiedene Tripel von Kurven 4. O. ein, welche auf der d je einen Doppelpunkt besitzen und zu zweien einander in je 4 Punkten begegnen. Von diesen Kurventripeln können nämlich deshalb keine 2 gleich sein, weil die beiden sie einschneidenden Flächen ausser diesen 3 Kurven und der d, also ausser einer Schnittkurve von der Ordnung $3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16$, noch die (von mir später zu bestimmende) endliche Anzahl von einfachen Geraden gemeinsam hätten, welche die d und die 3 Kurven in getrennten Punkten treffen und daher von jeder der beiden Flächen $2 + 3 = 5$ Punkte tragen.

Nun gibt es aber in den 3 Ebenen ε, ε', ε'' gerade ∞^{21} Tripel von biquadratischen Kurven, welche die d doppelt treffen, und sich paarweise in 4 Punkten schneiden. Von den ∞^{14} Kurven 4. O. in der Ebene ε haben nämlich ∞^{11} den Spurpunkt von d zum Doppelpunkt. Zu jeder von ihnen finden wir $\infty^{11-4} = \infty^7$ ebensolche Kurven in ε', welche die d in einem Doppelpunkt treffen und jener Kurve aus ε in denjenigen Punkten begegnen, welche diese in die Ebene ε' einschneidet. Zu jedem Kurvendupel dieser Art in ε und ε' haben wir schliesslich noch $\infty^{11-8} = \infty^3$ Kurven 4. O. in ε'', die auf d einen Doppelpunkt besitzen und durch diejenigen 8 Punkte gehen, in denen die Kurven

des Dupels die ε'' durchdringen. Wir erhalten also tatsächlich $\infty^{11+7+3} = \infty^{21}$ Kurventripel der gewünschten Art.

Durch jedes Tripel geht eine F_1^4. Da die Doppelgerade und eine ebene Kurve 4. Ordnung durch den Doppelpunkt und 11 einfache Punkte bestimmt ist, so brauche ich von den 21 bestimmenden Punkten einer F_1^4 nur 11 auf die erste $11-4=7$ auf die 2. und $11-2\cdot 4 = 3$ auf die 3. Kurve des Tripels zu legen, damit die Fläche diese 3 Kurven sämtlich in sich aufnimmt.

Es ist also jedes Kurventripel der beschriebenen Art das Schnittkurvensystem einer F_1^4, d. h. letzteres ist nicht speziellerer Art und ich kann daher auf die Eigenschaften der Doppelgeraden und dreier ebener Schnittkurven einer F_1^4 schliessen, aus denen von einer beliebigen Geraden d des Raumes und 3 beliebigen ebenen Kurven 4. Ordnung, welche die Gerade in je einem Doppelpunkt und einander in 4 Punkten begegnen.

2. Sind nun eine Gerade d und 3 ebene Kurven 4. Ordnung C, C', C'' so beschaffen, so hat dieses System von 4 Kurven eine endliche Anzahl von Treffgeraden. Zur Ermittelung derselben kann ich aber die Formel, welche Herr Prof. Sturm in seiner Liniengeometrie Band 1 Nr. 9 angegeben hat, nicht benutzen. Befindet sich nämlich unter den 4 Raumkurven eine Gerade, welche die anderen 3 Kurven sämtlich trifft, so kann man diese Formel nicht mehr anwenden. Für diese speziellen Fälle gilt ein anderes Gesetz, welches ich im folgenden ermitteln will, da ich es vielfach brauchen werde.

Nach Sturm ist die Anzahl der Geraden, welche 4 Raumkurven von den Ordnungen m_1, m_2, m_3, m_4 mit beziehentlich σ_{12}, σ_{13}, σ_{14}, σ_{23}, σ_{24}, σ_{34} Begegnungspunkten in getrennten Punkten treffen, gleich

$$\text{I.}\quad 2m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4-\sigma_{23}\cdot m_1\cdot m_4-\sigma_{13}\cdot m_2m_4-\sigma_{12}\cdot m_3m_4$$
$$-\sigma_{14}m_2m_3-\sigma_{24}\cdot m_1\cdot m_3-\sigma_{34}\cdot m_1\cdot m_2+\sigma_{23}\cdot\sigma_{14}+\sigma_{13}\cdot\sigma_{24}+\sigma_{12}\cdot\sigma_{34}.$$

Würde man dies auf die Gerade d und die 3 Kurven C, C', C'' von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 anwenden, welche

die Gerade beziehentlich α_1-, α_2-, α_3-mal treffen und einander paarweise in σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} Punkten begegnen, so erhielte man

$$2m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - \sigma_{23} \cdot m_1 - \sigma_{13} \cdot m_2 - \sigma_{12} \cdot m_3 - \alpha_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - \alpha_2 \cdot m_1 m_3 - \alpha_3 \cdot m_1 m_2 + \sigma_{23} \cdot \alpha_1 + \sigma_{13} \cdot \alpha_2 + \sigma_{12} \cdot \alpha_3.$$

Das ist aber nicht richtig.

3. Um die Anzahl der Geraden zu ermitteln, welche d, C, C', C'' getrennt treffen, muss ich nämlich von den $2m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$ Geraden, welche d und die 3 Kurven überhaupt treffen, zunächst die $\alpha_1 \cdot \sigma_{23} + \alpha_2 \cdot \sigma_{13} + \alpha_3 \cdot \sigma_{12}$ Geraden ausscheiden, welche einen Schnittpunkt von 2 Kurven verbinden mit einem Begegnungspunkt von d und der jeweiligen 3.

Die d ferner ist als Gerade, welche die 3 Kurven in beziehentlich α_1, α_2, α_3 Punkten trifft, $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$-fache Erzeugende von derjenigen Regelfläche, welche erfüllt wird von allen Geraden, die sich auf die 3 Kurven in getrennten Punkten stützen. Ist n der Grad dieser Fläche, so schneidet eine durch die d gelegte Ebene dieselbe noch in einer Kurve von der Ordnung $n - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$, welche von den Spuren der Erzeugenden gebildet wird. In dem Kontinuum der Spuren liefert nun aber die d als $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$-fache Erzeugende $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ Punkte. Von den $n - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ Schnittpunkten dieser Kurven und der d rühren also nur $n - 2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ von Erzeugenden her, welche nicht mit der d zusammengefallen sind, und es vereinigen sich mithin von den n Erzeugenden, welche eine beliebige Gerade des Raumes treffen, $2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ in dieser Geraden selbst, wenn sie den 3 Leitkurven in beziehentlich $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ Punkten begegnet, d. h. die Gerade d zählt dann für $2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ Treffgerade von d und den 3 Kurven.

Schliesslich habe ich noch die Geraden auszuscheiden, welche durch einen Begegnungspunkt von d mit einer der 3 Kurven oder den Schnittpunkt von 2 Kurven gehen und die beiden anderen Kurven, bezw. d und die 3. Kurve in verschiedenen Punkten schneiden. Das sind die nach Abzug der bereits genannten Geraden noch übrig bleibenden

Schnittkanten der Kegelpaare, welche 2 Kurven, oder eine Kurve und die d, projizieren aus einem Schnittpunkt der 3. und der d bezw. einen Begegnungspunkt der beiden anderen Kurven. Solche gemeinsame Kanten gibt es noch

$$\alpha_1(m_2 \cdot m_3 - \sigma_{23} - \alpha_2 \cdot \alpha_3) + \alpha_2(m_1 \cdot m_3 - \sigma_{13} - \alpha_1 \cdot \alpha_3) + \alpha_3(m_1 \cdot m_2 - \sigma_{12} - \alpha_1 \cdot \alpha_2) + \sigma_{23}(m_1 - \alpha_1) + \sigma_{13}(m_2 - \alpha_2) + \sigma_{13}(m_3 - \alpha_3).$$

Sondern wir alle aufgeführten Geraden ab, so bleiben

$$2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - \alpha_1 \cdot \sigma_{23} - \alpha_2 \cdot \sigma_{13} - \alpha_3 \cdot \sigma_{12} - 2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 - \alpha_1 \cdot m_2 \cdot m_3 + \alpha_1 \cdot \sigma_{23} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 - \alpha_2 \cdot m_1 \cdot m_3 + \alpha_2 \cdot \sigma_{13} + \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_3 - \alpha_3 \cdot m_1 \cdot m_2 + \alpha_3 \cdot \sigma_{12} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 - \sigma_{23} \cdot m_1 + \alpha_1 \cdot \sigma_{23} - \sigma_{13} \cdot m_2 + \alpha_2 \cdot \sigma_{13} - \sigma_{12} \cdot m_3 + \sigma_{13} \cdot \alpha_3 =$$

$$= 2m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot \sigma_{23} - m_2 \cdot \sigma_{13} - m_3 \cdot \sigma_{12} - \alpha_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - \alpha_2 \cdot m_1 \cdot m_3 - \alpha_3 \cdot m_1 \cdot m_2 + \alpha_1 \cdot \sigma_{23} + \alpha_2 \cdot \sigma_{13} + \alpha_3 \cdot \sigma_{12} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$$

Gerade übrig, welche die d und die 3 Kurven in 4 verschiedenen Punkten treffen. Man erhält also $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ Gerade mehr als nach der Sturmschen Formel. Hiernach gilt der Satz:

II. Auf eine Gerade d und 3 Raumkurven von den Ordnungen m_1, m_2, m_3, welche einander paarweise in beziehentlich σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} Punkten begegnen und die d in α_1, α_2, α_3 Punkten treffen, stützen sich

$$2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot \sigma_{23} - m_2 \cdot \sigma_{13} - m_3 \cdot \sigma_{12} - \alpha_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - \alpha_2 \cdot m_1 \cdot m_3 - \alpha_3 \cdot m_1 \cdot m_2 + \alpha \sigma_{23} + \alpha_2 \cdot \sigma_{13} + \alpha_3 \cdot \sigma_{12} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$$

Gerade des Raumes in getrennten Punkten.

4. Hieraus ergibt sich für d, C, C', C'' als Anzahl der Treffgeraden die Zahl 16, wenn man $m_1 = m_2 = m_3 = 4$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 4$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$ setzt.

Ist nun d Doppelgerade einer F_1^4 und C, C', C'' 3 ebene Schnittkurven dieser Fläche, so liegen die 16 Treffgeraden ganz auf der Fläche, weil sie je $2+3 = 5$ Punkte derselben tragen und, da jede Gerade der Fläche jede ebene Kurve auf ihr einmal trifft, so gehören umgekehrt die sämtlichen Geraden der F_1^4, welche sich auf die Doppel-

gerade stützen, zu den gefundenen 16 Geraden und diese bilden also die Gesamtheit der Geraden auf der Fläche, welche die Doppelgerade treffen.

5. Von diesen 16 Geraden trifft jede eine von den 15 übrigen, denn die durch eine solche und die Doppelgerade gelegte Ebene muss die Fläche noch in einer weiteren einfachen Geraden schneiden, und diese ist, da sie die d dann auch trifft, eine von den gefundenen Geraden.

Ich muss noch feststellen, dass in der Regel keine 2 von den 16 einfachen Geraden sich auf der Doppelgeraden begegnen. Dies findet nur bei ∞^{24} Flächen der 25-fach unendlichen Mannigfaltigkeit statt. Sind nämlich l und l' 2 Gerade, welche sich auf der Geraden d in einem Punkte P begegnen, so muss eine von den ∞^{21} Flächen F_1^4, welche die d zur Doppelgeraden haben, von l und l' noch je 3 Punkte tragen, wenn sie durch beide hindurchgehen soll, und es lassen sich also nur $\infty^{21-6} = \infty^{15}$ von den ∞^{21} Flächen durch diese beiden Geraden hindurchlegen. Da ∞^5 Geradenpaare des Raumes ihren Schnittpunkt auf d haben, so gibt es mithin unter den genannten ∞^{21} Flächen nur ∞^{20}, und in der Gesamtheit der Flächen im Raume nur ∞^{24}, welche 2 einfache Gerade besitzen, die sich auf die Doppelgerade in einem und demselben Punkte stützen.

6. Dann kann aber jede der einfachen Geraden nur eine der 15 anderen treffen und muss zu den 14 übrigen windschief sein. Denn ausserhalb der Doppelgerade kann sie keiner weiteren Geraden begegnen, da dann in einer und derselben Ebene die Doppelgerade und 3 einfache Gerade der Fläche liegen würden.

Ich habe also gefunden:

1) Auf einer Fläche vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden gibt es 16 einfache Gerade, welche sich auf die doppelte stützen. Jede von ihnen trifft eine der übrigen 15, und zwar in der Regel ausserhalb von den Doppelgeraden, und ist zu den anderen 14 windschief.

7. Diese 8 Paare sich schneidender Geraden will ich durch die Zeichen g_1, g_1'; g_2, g_2'; g_3, g_3'; g_4, g_4'; g_5, g_5'; g_6, g_6';

g_7, g_7'; g_8, g_8' in der Weise darstellen, dass g_i, g_i' zwei Gerade bedeuten, welche sich treffen und g_i, g_k oder g_i, g_k' zwei zu einander windschiefe Gerade sind.

8. Einfache Gerade, welche sich auf die doppelte nicht stützen, besitzt die F_1^4 dagegen in der Regel nicht, sodass die gefundenen Geraden die einzigen einfachen Geraden auf ihr sind.

Wenn nämlich d und g zwei einander nicht begegnende Gerade sind, so muss eine von den ∞^{21} Flächen F_1^4, welche in der ersteren eine doppelte Gerade besitzen, mit der letzteren 5 Punkte gemeinsam haben, um ganz durch sie hindurchzugehen, und es werden dies also nur $\infty^{21-5} = \infty^{16}$ von ihnen tun, sodass es unter diesen ∞^{21} nur $\infty^{16+4} = \infty^{20}$ und unter den ∞^{25} Flächen F_1^4 des Raumes nur ∞^{24} gibt, welche eine Gerade besitzen, die sich nicht auf die Doppelgerade stützt.

§ 2.

Spezielle Flächen vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden, welche einfache Gerade besitzen, die zu der doppelten windschief sind.

9. Die Untersuchungen am Schlusse des vorigen Kapitels ergeben, dass ∞^{24} Flächen F_1^4 eine Gerade haben, welche zu der Doppelgeraden windschief ist. Das Vorhandensein einer solchen Geraden auf einer F_1^4 ist also gleichbedeutend mit der Erfüllung einer einfachen Bedingung. In einer einfach unendlichen Mannigfaltigkeit von Flächen F_1^4 wird es somit eine endliche Anzahl von Flächen geben, welche eine Gerade dieser Art besitzen, wenn nicht sämtliche diese Eigenschaft haben.

10. Wir erkennen z. B. folgendes: damit eine von den ∞^{21} Flächen F_1^4, welche die d zur Doppelgeraden haben, durch 2 Gerade g_1 und g_1' hindurchgehen, welche einander und die d treffen, braucht sie ausser dem Schnittpunkt derselben nur nach je 2 also insgesamt 5, Punkte von ihnen zu tragen. Sollen also 4 solche Geradenpaare auf

der Fläche liegen, so muss diese 20 Punkte mit ihnen gemeinsam haben. Diese 20 einfachen Bedingungen werden von ∞^1 unsere ∞^{21} Flächen F_1^4 erfüllt. Nun haben je 4 windschiefe von den 8 Geraden der gegebenen 4 Geradenpaare ausser der d noch eine zweite gemeinsame Treffgerade d'. Diese trägt von jeder Fläche des einfach unendlichen Systems schon 4 Punkte. Gebe ich daher den letzten bestimmenden Punkt auf einer dieser $2^4 = 16$ Treffgeraden d', so bestimmt er eine F_1^4, welche diese Gerade ganz in sich aufnimmt. So entstehen 16 Flächen, welche noch je eine Gerade besitzen, die zur doppelten windschief ist. Jeder Punkt des Raumes dagegen, welcher auf keiner dieser 16 Flächen liegt, bestimmt eine F_1^4, welche keine von den genannten Geraden d' besitzt. Die übrigen unserer ∞^1 Flächen haben also überhaupt keine Gerade, welche die d nicht schneidet, da eine solche einem aus der d und einem Geradenpaare g_1, g_1' bestehenden ebenen Schnitt auf g_1 oder g_1' begegnen, d. h. aus einem jeden Geradenpaare der Fläche eine Gerade treffen muss, und mithin eine unserer 16 Treffgeraden ist.

11. Es gibt auch Flächen F_1^4 mit mehr als einer zu der doppelten windschiefen Geraden. So erfüllen z. B. in den Ebenen des Ebenenbüschels um eine Gerade d die Punkte, von denen aus die Spuren von 4 Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 des Raumes in bestimmter Reihenfolge durch einen Strahlenwurf projiziert werden, der ein gegebenes Doppelverhältnis hat oder der einem gegebenen Wurfe G von 4 Elementen projektiv ist, eine solche Fläche 4. Ordnung[1]). Die d ist nämlich Doppelgerade der erzeugten Fläche, denn, ist P ein Punkt auf d, und ist er Scheitel eines solchen Strahlenwurfes, so sind die Strahlen des letzteren die Schnittlinien der 4 Verbindungsebenen von P mit a_1, a_2, a_3, a_4 und einer Ebene des Ebenenbüschels um d. Nun umhüllen aber die Ebenen des Bündels um P, welche diese 4 festen Ebenen in einen Strahlenwurf von konstantem Doppelverhältnis schneiden, einen Kegel 2. Grades, und es gehen 2 dieser

1) Vgl. R. Sturm, Mathematische Annalen Bd. 12 Seite 288.

Ebenen durch die d hindurch. Der Punkt P ist also in der Tat Scheitel von 2 Strahlenwürfen der gewünschten Art, d. h. P und damit d liegt auf der erzeugten Fläche doppelt. Ausser der d erhalten wir aber in jeder Ebene durch d noch einen Kegelschnitt, da die Punkte in ihr, von denen aus die Spuren von a_1, a_2, a_3, a_4 unter dem gegebenen Doppelverhältnis erscheinen, eine Kurve 2. Ordnung bilden, welche durch diese Spuren hindurchgehen. Liegen 3 von den Spurpunkten in einer Geraden, so zerfällt diese Kurve in ein Geradenpaar, welches aus der Verbindungslinie der 3 Punkte und einer Geraden besteht, die durch den 4. Punkt hindurchgeht. Ist etwa a' eine der beiden Geraden, welche d, a_1, a_2, a_3 treffen, so wird für jeden Punkt auf ihr die verlangte Projektivität dadurch erfüllt, dass sie ausartet mit d' als singulärem Element in dem Strahlenbüschel um den Punkt in der Ebene (d, a') und dem vierten Elemente als singulärem in G. Bestimme ich ferner auf a' den Punkt A_4' so, dass $a'(a_1, a_2, a_3, A_4') \overline{\wedge} G$ ist, dann erfüllt jeder Punkt der Verbindungslinie von A_4' mit dem Spurpunkt von a_4 auch die Projektivität und diese Verbindungsgerade ist also die 2. Gerade der erzeugten Fläche in der Ebene (d, a'). Unsere Fläche ist also von der 4. Ordnung, trägt a_1, a_2, a_3, a_4 als einfache, d als doppelte Gerade und schneidet jede der 8 Ebenen, welche die d mit den $4 \cdot 2$ Treffgeraden der d und je 3 der Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 in einem Geradenpaar.

12. Ferner wird eine F_1^4 erzeugt durch die Schnittkurven entsprechender Elemente aus einem Flächenbüschel 3. Ordnung und einem zu ihm projektiven Ebenenbüschel, wenn die Achse d des letzteren der Grundkurve des ersteren angehört. In eine beliebige Ebene des Raumes schneiden unsere Büschel nämlich ein Kurvenbüschel 3. O. und ein zu ihm projektives Strahlenbüschel um den Spurpunkt D der Geraden d ein, welcher zugleich zu den Grundpunkten jenes Kurvenbüschels gehört. Die Kurve 4. O., welche nach Chasles durch die Schnittpunkte entsprechender Elemente dieser beiden Büschel erfüllt wird,

hat also in D einen Doppelpunkt [1]). Das räumliche Erzeugnis ist daher eine Fläche 4. O, welche die d zur Doppelgerade hat.

Die 8 Geradenpaare dieser Fläche ergeben sich in folgender Weise: Jede Ebene des gegebenen Ebenenbüschels enthält von der erzeugten Fläche ausser der d noch den Kegelschnitt, in welchem sie die zugeordnete Fläche 3. Ordnung durchdringt. In 8 Ebenen zerfallen diese Kurven 2. Ordnung. Die Flächen des erzeugenden Büschels haben nämlich ausser der d noch eine Raumkurve 8. Ordnung gemeinsam, welche sich viermal auf die d stützt [2]) und daher eine beliebige Ebene ε aus dem Ebenenbüschel um d ausserhalb von d noch in 4 Punkten durchdringt. Die Kurven 2. Ordnung, welche die Flächen des kubischen Flächenbüschels in die ε einschneiden, müssen sämtlich durch diese 4 Punkte gehen und bilden somit ein Kegelschnittbüschel mit 3 zerfallenen Kurven. Jede Ebene ε unseres Ebenenbüschels um d wird also von 3 kubischen Flächen des gegebenen Büschels in zerfallenen Kurven 2. Ordnung geschnitten. Diesen Flächen entsprechen wieder 3 Ebenen des Ebenenbüschels. Umgekehrt wird die einer Ebene ε' dieses Büschels zugeordnete Fläche im kubischen Flächenbüschel von 5 Ebenen ε des ersteren in Geradenpaaren durchdrungen, denn durch jede Gerade einer Fläche 3. Ordnung gehen bekanntlich 5 Ebenen, welche die Fläche dreipunktig berühren. Die so entstehende Korrespondenz [3, 5] unter den Ebenen durch d hat aber 8 Koinzidenzen. Es gibt daher 8 Ebenen im Ebenenbüschel um d, welche die ihnen entsprechenden Flächen in zerfallenen Kegelschnitten durchdringen. Dies sind die 8 g-Paare der erzeugten Fläche.

13. Sondern sich von der Grundkurve des erzeugenden kubischen Flächenbüschels ausser der d noch weitere Gerade ab, so liegen diese natürlich auch auf der

---

1) Vgl. Cremona: Einleitung in eine Theorie der ebenen Kurven Nr. 52.

2) Vgl. R. Sturm: Flächen 3. Ordnung Nr. 60.

erzeugten Fläche und wir erhalten wieder Flächen F_1^4, welche auch einfache Gerade enthalten, die zur doppelten windschief sind.

So kann z. B. die Grundkurve des Flächenbüschels 3. Ordnung aus einem windschiefen Vierseit, einer zu diesem windschiefen Geraden und 2 Kegelschnitten bestehen, welche sich auf jede Gerade des Vierseits stützen, einander nicht begegnen, und deren Ebenen durch die d hindurchgehen.

Diese Grundkurve eines kubischen Flächenbüschels erhält man nämlich als Spezialfall einer solchen, welche aus einer Geraden und 4 Kegelschnitten besteht und in den Flächen 3. Ordnung von R. Sturm Nr. 69, 1α beschrieben ist, wenn K^3, K^4 in Geradenpaare zerfallen.

Ist aber ein Teil einer vollen Schnittkurve von 2 Flächen 3. Ordnung eine Raumkurve 4. Ordnung erster Art, so muss der Restschnitt eine Raumkurve 5. Ordnung 12. Ranges sein[1]), wobei sich der Rang infolge eines Doppelpunktes dieser Restkurve immer um 2 vermindert[2]). Unsere aus d und den beiden Kegelschnitten bestehende Raumkurve 5. Ordnung müsste wegen der $2 \cdot 2$ Begegnungspunkte von d mit den beiden Kurven 2. Ordnung also vom Range $12 - 4 \cdot 2 = 4$ sein. In der Tat ist ihr Rang $= 2 + 2$, denn ein Kegelschnitt ist 2. Ranges und die d vom Range 0.

§ 3.

Die Kegelschnitte auf einer Fläche vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden.

14. Auf einer F_1^4 gibt es zwei verschiedene Arten von Kegelschnitten.

Zunächst schneidet jede durch die Doppelgerade gelegte Ebene die Fläche in einem Kegelschnitt, welcher sich auf die Doppelgerade der Fläche in 2 Punkten stützt. Diese ∞^1 Kegelschnitte will ich sämtlich mit S bezeichnen.

1) Vgl. R. Sturm: Flächen dritter Ordnung Seite 206.

2) Vgl. R. Sturm: Oberflächen 3. Ordnung Seite 192 erster Absatz.

Diese Kegelschnitte bilden ein System erster Stufe. Sind aber in einem solchen μ, ν, ϱ beziehentlich die Zahlen der in ihm befindlichen Kegelschnitte, deren Ebenen durch einen festen Punkt des Raumes gehen, derer, die sich auf eine gegebenen Gerade stützen und derjenigen, welche eine bestimmte Ebene berühren und η, δ die Zahlen der Kurven, welche beziehentlich in Geraden- und Punktepaare ausarten, so ist $\mu = 1$, $\nu = 4$, denn eine Gerade trifft die Fläche in 4 Punkten und durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt, $\varrho = 6$, denn so viele Kurven des Systems berühren eine Ebene, als an deren Schnittkurve 4. Ordnung von dem Spurpunkt der Doppelgeraden Tangenten ausgehen. Nun gelten aber die Formeln

1) $$2\nu = \varrho + 2\mu + \eta$$

2) $$2\varrho = \nu + \delta$$ [1])

Nach der ersteren ist also $\eta = 0$ und aus der 2. folgt dann $\delta = 8$. So finden wir wieder eine Bestätigung für die Zahl $2 \cdot 8 = 16$ der Geraden auf unserer Fläche. Es hat sich also ergeben:

1) Auf einer Fläche zweiter Ordnung mit einer doppelten Geraden gibt es eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten S, welche die Doppelgerade zweimal treffen, in jeder Ebene, welche die Doppelgerade enthält, einen. Zu diesen gehören als zerfallene Kurven zweiter Ordnung auch die 8 Geradenpaare der Fläche.

15. Auf unserer Fläche kann es aber noch andere Kegelschnitte geben. Ich untersuche daher zunächst, ob auf der F_1^4 Kurven zweiter Ordnung liegen, welche die Doppelgerade gar nicht treffen. Solche sind aber auf der F_1^4 nicht vorhanden. Zunächst müsste ein Kegelschnitt dieser Art, da jeder ebene Schnitt auf der Doppelgeraden d einen Doppelpunkt hat, zur ebenen Schnittkurve vierter Ordnung

1) Vgl. R. Sturm, Liniengeometrie Band 1. Nr. 19.

ergänzt werden, durch ein Geradenpaar, dessen Doppelpunkt auf d liegt. Ein solches gibt es aber, wie wir eben gefunden haben, auf der F_1^4 in der Regel nicht. Ausserdem müsste eine Fläche F_1^4 durch 9 Punkte eines Kegelschnittes hindurchgehen, wenn sie ihn ganz in sich aufnehmen sollte, ohne einen Doppelpunkt auf ihm zu haben. Durch einen gegebenen Kegelschnitt lassen sich also nur $\infty^{25-9} = \infty^{16}$ von den ∞^{25} Flächen F_1^4 in dieser Weise hindurchlegen, und es haben, da es ∞^8 Kegelschnitte im Raume gibt, ∞^{24} Flächen F_1^4 einen Kegelschnitt dieser Gattung.

2) Eine Fläche 4. Ordnung mit einer doppelten Geraden hat mithin in der Regel keinen Kegelschnitt, welcher zu der Doppelgeraden windschief ist.

16. Dagegen befindet sich auf der F_1^4 eine endliche Menge von Kegelschnitten, welche sich auf die Doppelgerade in einem Punkte stützen. Indem wir den Clebsch-Lüroth'schen Beweis [1]) modifizieren, ergibt sich ihre Anzahl in folgender Weise: Man ermittelt zunächst die Kurven 2. Ordnung im Raume, welche die Doppelgerade d und 7 zu einander windschiefe einfache Gerade der F_1^4: g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7 in 8 getrennten Punkten treffen. Diese begegnen dann auch den 6 Geraden eines jeden der 3 Sextupel

$$d,\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5$$
$$d,\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_6$$
$$d,\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_7$$

in 6 verschiedenen Punkten. Auf die Geraden eines solchen Sextupels stützen sich von den ∞^8 Kegelschnitten des Raumes $\infty^{8-6} = \infty^2$ in getrennten Punkten. Die Ebenen dieser Kurven umhüllen eine Fläche. In den gemeinsamen Tangentialebenen dieser 3 Flächen sind also die gewünschten Kegelschnitte zu suchen. Ich bestimme daher die Klasse einer solchen Fläche.

---

1) Vgl. Mathematische Annalen Band 1 Seite 258 ff.

17. Zunächst nehme ich an, dass die 6 Geraden des Sextupels d, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 sämtlich unter einander windschief sind, und ich werde erst dann aus dem hierfür gefundenen Resultat auf unseren Fall schliessen, bei dem nur 5 Gerade zueinander windschief sind und diese sämtlich von der 6. getroffen werden.

Die Klasse unserer Fläche ist die Anzahl der Ebenen in dem Büschel um eine beliebige Gerade g im Raume, welche die Geraden d, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 in 6 Punkten einer Kurve 2. Ordnung d. h. in 6 Punkten D, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 treffen, welche ein Pascal'sches Sechseck bilden. Sind $P \equiv (DG_1, G_3\ G_4)$, $Q \equiv (G_1\ G_2, G_4\ G_5)$ $R \equiv (G_2, G_3, G_5\ D)$ die Schnittpunkte der 3 Gegenseitenpaare eines von diesen Punkten gebildeten Sechsecks, so frage ich nach der Zahl der Ebenen des Büschels um g, in welchen die 3 Punkte P, Q, R in einer und derselben Geraden liegen. Die Geraden DG_1, G_3, G_4 treffen nun g, d, g_1; g, g_3, g_4 und beschreiben, wenn die Ebene den Büschel um g durchläuft, die Regelscharen mit den Leitgeraden g, d, g_1 bezw. g, g_3, g_4. Der Schnittpunkt P dieser beiden Geraden gleitet also auf der Raumkurve 3. Ordnung R^3 hin, in welcher sich die Trägerflächen der beiden Scharen, welche die g gemeinsam haben, einander noch durchdringen. Diese Kurve stützt sich auf die g in 2 Punkten und trifft jede Ebene durch g noch in einem 3. Punkte, ausserhalb von g. Dies ist der Punkt P. Ebenso sind Q, R die 3. Schnittpunkte der Ebenen unseres Büschels mit 2 anderen kubischen Raumkurven Q^3, R^3, welche gleichfalls die g zweimal treffen. Gibt es also eine Ebene durch g, welche die 6 Geraden d, g_1 g_2, g_3, g_4, g_5 in Punkten eines Kegelschnittes durchdringen, so liegen nach dem Satze des Pascal die 3 Punkte in einer Geraden, d. h. es gibt dann eine Gerade, welche unseren 3 Raumkurven und der g begegnen und zwar in 4 getrennten Punkten. Umgekehrt bestimmt aber auch jede Gerade, die g und die 3 Kurven getrennt schneidet, eine Ebene der gesuchten Art, dem die Spuren von P^3, Q^3, R^3 in der Ebene (d, p) liegen dann auf p, die Punkte D, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 bilden ein Pascalsches Sechseck,

d. h. sie liegen auf einem Kegelschnitt, welcher d, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 trifft. Die Klasse unserer Fläche ist also gleich der Anzahl der Geraden des Raumes, welche d, P^3, Q^3, R^3 in 4 verschiedenen Punkten treffen. Hierfür liefert uns aber die Formel II in Nr. 3, wenn ich $m_1 = m_2 = m_3 = 3$, $m_4 = 1$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$ setze, die Zahl 8.

Die Ebenen, welche 6 windschiefe Gerade in Punkten eines Kegelschnittes treffen, umhüllen also eine Fläche 8. Klasse, welche auch die Ebenenbüschel um die 6 Geraden enthält und zwar ist jede Ebene eines dieser Büschel Doppelberührungsebene.

Lege ich nämlich durch eine der 6 Geraden eine Ebene, so schneidet diese die anderen Geraden in 5 Punkten, durch welche ein Kegelschnitt bestimmt ist. Dieser trifft aber die erste Gerade in 2 Punkten und zählt also als Kegelschnitt, welcher den gegebenen Geraden in je einem Punkte begegnet, zweimal.

18. Sind jedoch unter den 6 Geraden nur die 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 zu einander windschief, und treffen diese sämtlich die d, so betrachte ich nur die Kegelschnitte, welche die 6 Geraden in getrennten Punkten schneiden. Die 5 Ebenenbündel um die Begegnungspunkte der d mit den anderen Geraden, welche der Fläche 8. Klasse dann auch angehören, da eine Ebene eines solches Bündel die 6 Geraden nur in 5 Punkten trifft, durch welche immer ein Kegelschnitt hindurchgeht, habe ich also abzusondern.

Es bleibt noch eine Fläche 3. Klasse übrig, für welche die Ebenen der Büschel um $g_1 \ldots g_5$ nur noch einfache Berührungsebenen sind, weil sie auch zu den sich absondernden Bündeln gehören. Die Ebenen des Büschels um d gehören auch zu den Tangentialebenen dieser Restfläche.

19. Ebenso umhüllen die Ebenen derjenigen Kegelschnitte, welche sich auf die Sextupel d, g_1, g_2, g_3, g_4, g_6 und d, g_1, g_2, g_3, g_4, g_7 in getrennten Punkten stützen, zwei Flächen 3. Kl., denen die Ebenenbüschel um die Geraden dieser Sextupel angehören. Die Ebenenbüschel d, g_1, g_2, g_3, g_4 sind allen drei Flächen gemeinsam. Ebenso

auch das Ebenenbüschel, welches zur Axe hat die 2. gemeinsame Treffgerade d' von g_1, g_2, g_3, g_4, da seine Ebenen (d', g_1), (d', g_2), (d', g_3), (d', g_4) Tangentialebenen aller 3 Flächen sind.

20. Unter den gemeinsamen Berührungsebenen dieser 3 Flächen sind nun die Ebenen derjenigen Kegelschnitte zu suchen, welche alle 8 Gerade in getrennten Punkten treffen.

Die Ebenen aus den gemeinsamen Büscheln kommen aber hierbei nicht in Betracht. Eine Ebene durch d oder d' zunächst kann ja nur zerfallene Kurven 2. Ordnung enthalten, da sie die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 sämtlich auf d schneidet. Eine Ebene ferner, welche aus einem der 4 Büschel um g_1, g_2, g_3, g_4 stammt, z. B. eine Ebene, welche g_1 enthält, möge die 3 Geradensextupel in Punktsystemen

$$D_1, G_2, G_3, G_4, G_5$$
$$D_1, G_2, G_3, G_4, G_6$$
$$D_1, G_2, G_3, G_4, G_7$$

treffen. Durch jedes dieser Systeme ist ein Kegelschnitt festgelegt, aber in der Regel nicht derselbe, denn durch d und 5 windschiefe Gerade g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 z. B. ist die F_1^4 nicht bestimmt. Es gibt vielmehr, da eine von den ∞^{21} Flächen F_1^4, welche die d zur Doppelgeraden haben, von einer Treffgeraden derselben nur noch 3 Punkte zu tragen braucht, um sie ganz in sich aufzunehmen, noch $\infty^{21-5\cdot3} = \infty^6$ Flächen, welche durch d doppelt und g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 einfach hindurchgehen, und ich kann g_6 und g_7 noch beliebig unter den Geraden wählen, welche die d treffen, so dass G_6 und G_7 also in der Regel nicht auf dem durch D, G_2, G_3, G_4, G_5 gehenden Kegelschnitt liegen.

Ich untersuche daher nur diejenigen gemeinsamen Tangentialebenen unserer 3 Flächen, welche ausserhalb der 6 gemeinsamen Büschel liegen.

21. Da uns aber die Eigenschaften der Flächen 3. Ordnung mehr vertraut sind als diejenigen der Flächen 3. Klasse, so betrachte ich zunächst die duale Figur und werde dann von dieser erst auf unsere Flächen 3. Klasse schliessen.

Einer Fläche als Ort der Ebenen von denjenigen Kegelschnitten, welche 6 Gerade in getrennten Punkten treffen, entspricht räumlich dual eine Fläche als Ort der Punkte, deren Verbindungsebenen mit den 6 gegebenen Geraden 6 verschiedene Tangentialebenen eines Kegels 2. Grades sind. Sind die 6 Geraden sämtlich zu einander windschief, so erhält man eine Fläche 8. Ordnung. Trifft aber eine von ihnen die 5 anderen, und sind nur diese zu einander windschief, so sondern sich die 5 Verbindungsebenen der einzelnen mit den 5 übrigen ab, und es bleibt eine Fläche 3. Ordnung übrig, welche die 6 Geraden trägt. So ergeben sich 3 Flächen 3. Ordnung, welche die 4 windschiefen Geraden gemeinsam haben und die beiden Treffgeraden derselben d und d'.

Wir haben die gemeinsamen Punkte dieser 3 Flächen 3. Ordnung aufzusuchen ausserhalb ihrer 6 gemeinsamen Geraden.

Zwei von ihnen schneiden sich noch in einer kubischen Raumkurve. Nun stützt sich eine Gerade, welche auf 2 Flächen 3. Ordnung liegt, auf die Restschnittkurve 8. Ordnung in 4 Punkten [1]). Unsere kubische Kurve trifft daher d und d' gar nicht und jede der Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 in 2 Punkten, weil jede von jenen den letzteren schon in insgesamt 4 Punkten begegnet, jede der Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 aber nur d und d' schneidet. Von den 9 Punkten, in welchen die kubische Kurve die 3. Fläche 3. Ordnung durchdringt, liegen also $4 \cdot 2 = 8$ auf den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, keiner auf d oder d' und genau einer ausserhalb von den gemeinsamen Geraden.

22. Nach dem Prinzip der Dualität haben dann die 3 Flächen 3. Klassen, von denen wir ausgingen, genau eine gemeinsame Tangentialebene, welche keinem ihrer gemeinsamen Ebenenbüschel angehört.

Diese Ebene allein kann einen Kegelschnitt enthalten, welcher die 8 gegebenen Geraden in 8 getrennten Punkten trifft. In der Tat ist dies auch der Fall, denn als Tan-

1) Vergl. R. Sturm, Flächen 3. Ordnung, Art. 60.

gentialebene aller unserer 3 Flächen 3. Klasse trifft sie jedes der zugehörigen Geradensextupel in 6 Punkten eines Kegelschnittes. Dieser muss aber in allen 3 Fällen derselbe sein, denn die 3 Punktsysteme haben 5 Punkte gemeinsam.

23. Es gibt also genau einen Kegelschnitt im Raume, welcher sich auf die Doppelgerade und 7 windschiefe einfache Gerade der F_1^4 in getrennten Punkten stützt.

Dieser trägt aber, da der auf d gelegene doppelt zählt, 9 Punkte der Fläche und liegt daher ganz auf ihr. Er trifft dann auch eine Gerade aus dem 8. Geradenpaare, weil er dessen Ebene auf d erst einmal durchdringt. Da hiernach je 7 windschiefe Gerade der Fläche einen solchen Kegelschnitt und dadurch auch dessen 8. Treffgerade bestimmen, so werde ich auf der F_1^4 so oft eine Kurve 2. Ordnung dieser Art erhalten, als es in 7 Geradenpaaren Systeme von 7 windschiefen Geraden gibt, die Anzahl dieser Systeme ist aber $2^7 = 128$. Folglich gibt es auf den F_1^4 128 solche Kegelschnitte.

Diese Kurven will ich sämtlich mit K bezeichnen.

24. Umgekehrt sind die gefundenen K auch die sämtlichen Kegelschnitte auf der F_1^4, welche der Doppelgeraden einmal begegnen. Jeder derselben muss nämlich dem aus der d und einem Geradenpaar g_1, g_1' bestehenden ebenen Schnitt ausser auf d noch einmal auf g_1 oder g_1' begegnen, d. h. er trifft aus jedem der 7 Geradenpaare, die uns die 128 Kegelschnitte K lieferten eine Gerade und gehört also gleichfalls zu diesen, denn, dass ein Kegelschnitt der Fläche, welcher sich auf die Doppelgerade nur einmal stützt, dies tut in demselben Punkte wie eine einfache Gerade, d. h. die d und die einfachen Geraden nicht in getrennten Punkten schneidet und deshalb nicht einer der gefundenen Kegelschnitte K zu sein braucht, kommt in der Regel nicht vor. Da nämlich eine von den $\infty^{21-3} = \infty^{18}$ Flächen F_1^4, welche eine Gerade d zur Doppelgeraden und eine Treffgerade g_1 derselben zur einfachen Geraden haben, von einem Kegelschnitt, der durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht, ausser diesem doppelt zu zählenden

Begegnungspunkte nach $9-2 = 7$ Punkte tragen muss, um ihn ganz in sich aufzunehmen, so gehen nur $\infty^{18-7} = \infty^{11}$ von den obigen Flächen noch durch diese Kurve 2. Ordnung, und es besitzen demnach nur $\infty^{11+6} = \infty^{17}$ von ihnen überhaupt einen Kegelschnitt, der d und g_1 in demselben Punkte trifft, weil es ∞^6 Kurven 2. Ordnung im Raume gibt, die durch einen gegebenen Punkt gehen. Nun treffen ∞^3 Gerade des Raumes die d. Also haben nur $\infty^{17+3} = \infty^{20}$ von den ∞^{21} Flächen F_1^4, welche die d zur Doppelgraden haben, und nur ∞^{24} von den sämtlichen ∞^{25} Flächen F_1^4 des Raumes einen Kegelschnitt, welcher der Doppelgeraden und einer einfachen Geraden in einem und demselben Punkte begegnet. Wir können daher sagen:

3) Auf einer Fläche 4. Ordnung mit einer doppelten Geraden gibt es 128 Kegelschnitte K, welche die Doppelgerade in einem Punkte treffen.

25. Ein K kann zu einer ebenen Schnittkurve der F_1^4 nur durch einen anderen der Kegelschnitte K ergänzt werden, welcher den ersteren auf der Doppelgeraden trifft.

4) Die 128 Kegelschnitte K liegen daher paarweise in 64 Ebenen. Ich bezeichne diese 64 K-Paare mit K_1, K_1'; K_2, K_2'; ... K_{64}, K_{64}'. Die Kurven eines Paares begegnen der Doppelgeraden in einem und demselben Punkte.

26. Da 2 ebene Schnitte einer Fläche 4. Ordnung 4 Punkte gemeinsam haben, so treffen sich ein K-Paar und eine aus der d, und einem Geradenpaar g_1, g_1' bestehende ebene Kurve der F_1^4 ausserhalb der d noch in 2 Punkten. Dies sind die Punkte, in denen die Schnittlinie der K-Ebene und der g-Ebene die beiden Schnittkurven ausserhalb von der d trifft. Auf jedem der beiden Kegelschnitte liegt einer von ihnen und auch auf jeder der beiden Geraden. Also gilt:

5) Jeder Kegelschnitt K trifft aus jedem Geradenpaar eine und nur eine Gerade. Er stützt sich auf 8 windschiefe Gerade der Fläche, welche durch 7 von ihnen bestimmt sind. Sein

Paargenosse stützt sich auf die 8 anderen Geraden der Fläche.

6) Jede Gerade g der F_1^4 trifft aus jedem K-Paar eine und nur eine Kurve. Sie stützt sich auf 64 Kegelschnitte K und ihre Ebenengenossin auf die Paargenossen derselben.

Je 7 windschiefe Gerade der F_1^4 führen zu einem Kegelschnitt K, der sie sämtlich trifft. Ist $n \leqq 7$, so stützen sich auf n windschiefe Gerade der Fläche so viele Kegelschnitte K, als es in 7 Geradenpaaren, denen diese n Geraden angehören, Systeme von 7 windschiefen Geraden gibt. Die Anzahl dieser Sextupel ist aber 2^{7-n}. Also können wir sagen:

7) Auf $n \leqq 7$ windschiefe Gerade der F_1^4 stützen sich 2^{7-n} Kegelschnitte K und zwar auf 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 windschiefe Gerade beziehentlich 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 Kegelschnitte K.

§ 4.

Die Dupel von Kegelschnitten K und die Oktupel windschiefer Geraden g.

27. Wir haben gefunden, dass je 7 windschiefe Gerade der F_1^4, etwa $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7$ einen Kegelschnitt K und damit die 8 windschiefen Treffgeraden desselben bestimmen. Diese mögen bei einem der 128 Kegelschnitte etwa K_1 sein $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$. Die 8 windschiefen Geraden $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8'$ können sich dann aber nicht auf einen und denselben Kegelschnitt K stützen.

1) Auf einer Fläche F_1^4 gibt es also 2 verschiedene Gattungen von Oktupeln windschiefer Geraden. Beliebige 7 windschiefe Gerade der Fläche bestimmen je ein Oktupel beider Gattungen. Die einen sind die 128 Systeme von Treffgeraden der Kegelschnitte K. Ich will sie Hauptoktupel nennen. Die Oktupel der anderen Gattung enthalten Gerade, welche sich nicht auf

ein und denselben Kegelschnitt K stützen. Diese mögen Nebenoktupel heissen.

28. Da die Kegelschnitte K durch 7 ihrer Treffgeraden und die Oktupel gleichfalls durch windschiefe Gerade bestimmt sind, so gilt:

2) Zwei Kegelschnitte K haben höchstens 6 Treffgerade gemeinsam.

3) Zwei Oktupel gleicher Gattung unterscheiden sich durch mindestens 2 ihrer Geraden.

Während ich 2 Kegelschnitte K, welche in eine und dieselbe Ebene fallen, ein K-Paar nenne, will ich unter einem K-Dupel 2 beliebige Kegelschnitte K verstehen und letzteres mit $D^{(\alpha)}$ bezeichnen, wenn sich seine Kurven in α Punkten begegnen.

Da 2 Kegelschnitte, welche 3 oder mehr Punkte gemeinsam haben, in derselben Ebene liegen, so ist ein K-Dupel mit 3 oder mehr Schnittpunkten ein K-Paar.

Weil ferner 2 ebene Schnitte einer Fläche 4. Ordnung sich in 4 Punkten treffen, und weil jeder Kegelschnitt K einer ebenen Kurve auf der F_1^4 zweimal begegnet, so gelten die Sätze:

4) 2 K-Paare schneiden sich immer in 4 Punkten.

5) Ein Kegelschnitt K stützt sich auf ein K-Paar in 2 Punkten.

6) Schneidet ein Kegelschnitt K die eine Kurve eines K-Paares in α Punkten, so begegnet er der anderen in $2-\alpha$ Punkten.

Hieraus folgt aber:

7) Treffen sich 2 Kegelschnitte K in α Punkten, so tun dies auch ihre Paargenossen.

29. Wir wissen ferner:

8) Die Kurven eines K-Paares haben keine gemeinsame Treffgerade auf der

F_1^4. Ihre Treffgeraden ergänzen sich zu den 8 Geradenpaaren der Fläche.

Haben dagegen 2 Kegelschnitte K $\alpha < 3$ Begegnungspunkte, so gibt es Gerade auf der Fläche, welche sich auf beide Kurven gleichzeitig stützen. Diese treffen nicht nur die beiden K, sondern auch die d und jeden ebenen Schnitt der Fläche, und zwar tun sie dies in getrennten Punkten. Umgekehrt liegt jede Gerade des Raumes, welche die beiden Kegelschnitte. die d und eine beliebige ebene Kurve der Fläche in verschiedenen Punkten trifft, ganz auf der F_1^4. Die Anzahl dieser Geraden im Raume ist $6-2\alpha$, wie die Formel II im § 1 zeigt, wenn man $m_1 = 4$, $m_2 = m_3 = 2$, $\sigma_{23} = \alpha$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ setzt. Also haben die beiden Kegelschnitte $6-2\alpha$ gemeinsame Treffgerade und wir können sagen:

9) Auf 2 Kegelschnitte K mit α Begegnungspunkten stützen sich $6-2\alpha$ Gerade der Fläche. Zwei Kegelschnitte K haben also immer eine gerade Anzahl von gemeinsamen Treffgeraden auf der Fläche, nämlich 6, 4, 2 oder 0 Gerade.

Mit anderen Worten gilt also:

10) Zwei Hauptoktupel haben immer eine gerade Anzahl von gemeinsamen Geraden, nämlich 6, 4, 2 oder 0.

Dann ist aber auch die Umkehrung von 9) evident:

11) Zwei Kegelschnitte K begegnen sich in 0, 1, 2 oder 3 Punkten, ausserhalb der Doppelgeraden, je nachdem sie 6, 4, 2 oder 0 gemeinsame Treffgerade besitzen.

30. Ferner erkennen wir, dass wir aus einem Hauptoktupel immer ein Nebenoktupel erhalten, wenn wir eine einzelne Gerade desselben durch ihre Genossin ersetzen, und dann wieder abwechselnd zu einem Hauptoktupel und Nebenoktupel gelangen, wenn wir dies wiederholen. Daraus folgt dann:

12) Zwei Oktupel windschiefer Geraden von verschiedener Gattung haben immer eine ungerade Anzahl von gemeinsamen Geraden.

Evident ist dann die Umkehrung von 10) und 12):

13) Zwei Oktupel windschiefer Geraden sind gleicher oder ungleicher Gattung, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl gemeinsame Geraden besitzen.

Mit Hülfe der Sätze 10), 12), 13) und unter Annahme, dass die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8 ein Hauptoktupel bilden, gelangt man zu den 128 Hauptoktupeln, wie sie die beigefügte Liste angibt. Wir gelangen zu ihnen auch im Laufe der folgenden Betrachtungen, in welchen die verschiedenen K-Dupel untersucht werden.

31. Ein Kegelschnitt K_1 und 2 seiner windschiefen Treffgeraden etwa g_1, g_2, bilden eine Raumkurve 4. Ordnung zweiter Art. Durch sie ist eine Fläche 2. Ordnung F^2 bestimmt, auf welcher auch die d liegt, da d und F^2 die 3 Begegnungspunkte der ersteren mit K_1, g_1, g_2 gemeinsam haben. Unsere F^2 schneidet die F_1^4 ausser in der aus K_1, d, g_1, g_2 bestehenden Kurve 6. Ordnung noch in einer Kurve 2. Ordnung. Nun muss aber jede Gerade der einen oder anderen Schar diese Kurve einmal treffen. Letztere ist daher ein ebener Schnitt und kann nur ein Kegelschnitt K sein. Er trifft K_1 in 2 Punkten, da er mit ihm auf derselben Fläche 2. Ordnung liegt, und stützt sich aus demselben Grunde auch auf g_1 und g_2 je einmal.

So führen je 2 Treffgerade von K_1 zu einer Fläche 2. Ordnung, welche F_1^4 in einen Kegelschnitt K durchdringt, der K_1 zweimal begegnet. Zwei verschiedene Dupel unter den Geraden, welche sich auf K_1 stützen, bestimmen zwei verschiedene Flächen 2. Ordnung und schneiden dann auch verschiedene Kegelschnitte in der F_1^4 ein.

Da es unter 8 Geraden $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ Dupel gibt, so erhalte ich 28 Kegelschnitte K, welche sich auf K_1 in 2 Punkten stützen.

Hat umgekehrt ein Kegelschnitt K_2' mit K_1 2 Punkte

gemeinsam, so besitzen K_1 und K_2' 2 gemeinsame Treffgerade. Die letzteren bestimmen aber mit K_1 wieder eine von den obigen 28 Flächen 2. Ordnung, und diese nimmt auch K_2' in sich auf, da sie von ihm seine 5 Begegnungspunkte mit K_1, d und den gemeinsamen Treffgeraden trägt. Es gehört also auch K_2' und somit jeder Kegelschnitt K, welcher K_1 zweimal trifft, zu den gefundenen 28 Kegelschnitten, und wir haben mithin erkannt:

14) Zu jedem Kegelschnitt K gibt es 28 andere, welche er zweimal trifft.

Die zu diesen 28 Kegelschnitten gehörigen Hauptoktupel sind nach den Sätzen 9) und 11) die Oktupeln O_2', O_3' ... O_{29}' der Liste, unter der Voraussetzung, dass K_1 sich auf die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8 stützt.

32. Nach Satz 6) sind die Paargenossinnen der 28 Kegelschnitte, welche K_1 zweimal begegnen, diejenigen Kegelschnitte K, welche K_1 gar nicht treffen. Also gilt:

15) Jeder Kegelschnitt K ist zu 28 anderen windschief.

Die Hauptoktupel dieser Kegelschnitte ergeben sich aus den eben gefundenen nach Satz 8). Es sind dies in meiner Liste die Oktupel 0_2, 0_3 ... bis 0_{29}.

33. Ferner bestimmt ein Kegelschnitt K_1, welcher sich auf die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8 stützen möge, mit der Geraden d und 4 seiner Treffgeraden, etwa g_1, g_2, g_3, g_4 eine kubische Regelfläche. Die Geraden des Raumes nämlich, welche K_1, d und die 2. gemeinsame Treffgerade d' von g_1, g_2, g_3, g_4 in getrennten Punkten schneiden, erfüllen eine Regelfläche 3. Grades.

Dies lehren folgende Betrachtungen: die Anzahl der Treffgeraden von 4 Raumkurven ist gleich der Ordnung der Regelfläche der Treffgeraden dreier dieser Kurven, wenn die 4. eine beliebige Gerade des Raumes ist. Sind m_1, m_2, m_3 die Ordnungen von 3 Kurven und σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} die Anzahlen ihrer Begegnungspunkte, so ist nach Satz II in Nr. 3 die Anzahl der Treffgeraden von diesen 3 Kurven und einer beliebigen Geraden des Raumes gleich $2m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot \sigma_{23} - m_2 \cdot \sigma_{13} - m_3 \sigma_{12}$ und wir können sagen:

III) Der Grad der Regelfläche, welche erfüllt wird von den Geraden des Raumes, die 3 Raumkurven von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 mit beziehentlich σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} Begegnungspunkten in getrennten Punkten treffen, ist $2m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot \sigma_{23} - m_2 \cdot \sigma_{13} - m_3 \cdot \sigma_{12}$.

Diese Formel liefert nun in unserem Falle, wo d, d', K_1 die Leitkurven sind, für den Grad der Regelfläche in der Tat die Zahl 3, wenn wir $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = 2$ $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$, $\sigma_{13} = 1$ setzen.

Die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 sind ersichtlich Erzeugende dieser Regelfläche. Ferner erkennt man leicht d als doppelte und d' als einfache Leitgerade und K_1 als einfache Kurve derselben.

Die Gerade d' gehört nur unserer Regelfläche an, d, g_1, g_2, g_3, g_4 und K_1 dagegen auch der F_1^4. Ausser diesen eine Schnittkurve von der Ordnung $4+4+2 = 10$ darstellenden Linien durchdringen sich die beiden Flächen noch in einer Kurve 2. Ordnung. Aus Geraden kann dieselbe nicht bestehen, denn dann müssten diese als Erzeugende der kubischen Fläche die Leitgerade d' treffen, so dass diese Gerade d' mit der F_1^4 mehr als 4 Punkte gemeinsam haben und auch auf dieser Fläche liegen würde, während das doch nicht möglich ist, da d' zu d windschief ist. Ein Kegelschnitt S kann sie auch nicht sein, da jede Ebene durch d die kubische Regelfläche nur noch in einer Geraden durchdringt. Unsere Restschnittkurve kann also nur von einem Kegelschnitt K gebildet werden. Möge er K_{30} heissen. Als Kurven 2. Ordnung auf einer und derselben Regelfläche 3. Grades haben K_1 und K_{30} einen Schnittpunkt.

Die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 treffen auch K_{30}, denn sie müssen jedem ebenen Schnitt der Regelfläche begegnen und können die Erzeugende e, welche K_{30} zu einer ebenen Kurve 3. Ordnung der Fläche ergänzt, nicht treffen. Da nämlich die e nicht nur d, d' und K_1, sondern auch K_{30} einmal auf d und einmal ausserhalb von d schneidet, so trägt sie von der F_1^4 ausser ihrem doppelt zu zählenden

Punkte auf d und ihrem Schnittpunkt mit K_1 noch einen Punkt des K_{30}. Würde sich also auf e noch eine der Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 stützen, so müsste e auf der F_1^4 liegen, während es in den Ebenen der Kegelschnitte K doch keine Gerade der Fläche gibt.

Da 2 verschiedene Quadrupel unter den Treffgeraden von K_1 verschiedene kubische Regelflächen bestimmen, so liefern sie auch 2 verschiedene Kegelschnitte, denn 2 von diesen Flächen, welche denselben Kegelschnitt, etwa K_{30}, in die F_1^4 nicht einschneiden, hätten eine Kurve gemeinsam, deren Ordnung grösser als 9 ist, nämlich ausser der als Schnittgeraden vierfach zählenden d und den beiden Kegelschnitte K_1, K_{30} noch die sämtlichen Geraden der zu beiden Flächen gehörigen Quadrupel, weil jede dieser Geraden in ihren Schnittpunkten mit d K_1 und K_{30} von den beiden kubischen Flächen schon je 4 Punkte tragen.

Da sich nun aus 8 Geraden $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ Quadrupel bilden lassen, so erhalten wir 70 Kegelschnitte K, welche K_1 einmal treffen.

Ist umgekehrt K_{30} ein Kegelschnitt, welcher K_1 einmal begegnet, so haben K_1 und K_{30} 4 gemeinsame Treffgerade auf der F_1^4. Die Geraden des Raumes, welche d, K_1, K_2 getrennt schneiden, erfüllen dann eine Regelfläche 3. Grades, wie wieder die Formel II) lehrt, wenn ich in ihr $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 1$ setze. Zu ihren Erzeugenden gehören ersichtlich auch die 4 Geraden der Fläche, welche K_1 und K_{30} gleichzeitig treffen und die 2. Treffgerade d' dieser 4 Geraden ist mithin Leitgerade der Fläche. Diese ist also eine der obigen kubischen Regelflächen und unser Kegelschnitt K_{30} ist einer der gefundenen 70 Kegelschnitte. Folglich können wir sagen:

16) Zu jedem Kegelschnitt K gibt es 70 andere, welche ihm einmal begegnen.

Die Hauptoktupel, welche zu den 70 Kegelschnitten gehören, die K_1 in einem Punkte treffen, erhalte ich mit Hülfe der Sätze 9) und 11) in den Oktupeln 0_{30} bis 0_{64} und $0'_{30}$ und $0'_{64}$.

34. Aus den gefundenen Resultaten kann ich nun die folgende Tabelle zusammensetzen, welche angibt, wie sich zu jedem Kegelschnitt K die 127 übrigen bezüglich der Schnittpunkte verhalten.

17) Jeder Kegelschnitt K

trifft	1	28	70	28 andere
in beziehentlich	4	2	1	0 Punkten.

Schliesslich folgt aus unseren Ergebnissen, dass es $\frac{128 \cdot 28}{2} = 1792$ Dupel von windschiefen Kegelschnitten K gibt und ebenso viele Kegelschnittdupel mit 2 Begegnungspunkten und $\frac{128 \cdot 70}{2} = 4480$ Dupel von Kegelschnitten K, welche sich einmal begegnen. Also gilt:

18) Unter den 8128 Dupeln von Kegelschnitten K auf einer F_1^4 gibt es

	1792	4480	1792	64 Dupel
mit	0	1	2	4 Begegnungspunkten.

§ 5.

Die Tripel von Kegelschnitten K.

35. Ein System von 3 beliebigen Kegelschnitten K der F_1^4 will ich ein K-Tripel nennen und dasselbe mit $T^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ bezeichnen, wenn sich seine Kurven in beziehentlich α, β, γ Punkten begegnen.

Drei Kegelschnitte K mögen nun ein $T^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ bilden. Jede gemeinsame Treffgerade dieser 3 Kurven auf der Fläche stützt sich dann auf die 3 Kegelschnitte und die d in 4 getrennten Punkten. Umgekehrt gehört jede Gerade des Raumes, welche die Doppelgerade und die Kurve des $T^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ in verschiedenen Punkten schneidet, ganz der Fläche an, da sie mit dieser $2+3=5$ Punkte gemeinsam

hat. Die Anzahl dieser Geraden ist $5-\alpha-\beta-\gamma$. wie die Formel II) lehrt, wenn ich in ihr $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, $\sigma_{12} = \alpha$, $\sigma_{13} = \beta$, $\sigma_{23} = \gamma$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ setze; und wir können sagen:

1) Auf 3 Kegelschnitte K mit beziehentlich α, β, γ Begegnungspunkten stützen sich $5-\alpha-\beta-\gamma$ Gerade der Fläche.

Hieraus aber ersehen wir sofort:

2) Auf der F_1^4 gibt es kein Tripel $T^{(2,2,2)}$ von Kegelschnitten K.

Dann gilt aber auch:

3) Auf der F_1^4 gibt es kein Tripel $T^{(0,0,2)}$.

Würden nämlich K_i, K_k, K_l ein Tripel dieser Art bilden, in welchem K_l zu K_k und K_l windschief ist. die letzteren beiden aber sich in 2 Punkten schneiden, so würde sich der Paargenosse K_i' von K_i auf K_k und K_l je zweimal stützen, und K_i', K_k, K_l würden ein $T^{2,2,2}$ bilden, welches nach Satz 2) nicht existieren kann.

36. Die beiden Kegelschnitte K_1, K_2' mit den Treffgeraden

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8$$
$$g_1',\ g_2',\ g_3',\ g_4',\ g_5',\ g_6',\ g_7,\ g_8$$

haben 2 Punkte gemeinsam, da sie sich auf 2 Gerade der Fläche gleichzeitig stützen. Dieses K-Dupel will ich nun benutzen, um das Verhalten eines $D^{(2)}$ zu den übrigen Kegelschnitten K zu untersuchen.

Aus 2) und 3) ergeben sich zunächst die folgenden Sätze:

4) Es gibt keinen Kegelschnitt K, welcher die Kurven eines $D^{(2)}$ in je 2 Punkten trifft.

5) Die Kegelschnitte eines $D^{(2)}$ sind zu keinem der übrigen K gleichzeitig windschief.

Dagegen sind Kegelschnitte K vorhanden, welche einer Kurve unseres $D^{(2)}$, etwa K_1, gar nicht und der anderen K_2' zweimal begegnen. Ist K_i ein solcher, so müssen K_1, K_2', K_i nach Satz 1) eine gemeinsame Treffgerade haben. Dies kann natürlich nur eine von den beiden Geraden g_7, g_8 sein, welche sich schon auf K_1 und

K_2' stützen. Ausserdem muss K_i dann die Genossin der anderen von diesen beiden Geraden schneiden und 5 von den 6 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 sowie die Genossin der 6. von ihnen. Nehme ich umgekehrt eine von den Geraden g_7, g_8, etwa g_7, ferner 5 von den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, etwa g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 und die Genossin g_6' der letzten, so bestimmen diese 7 Geraden $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6', g_7$ einen Kegelschnitt K mit dem Hauptoktupel $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6', g_7, g_8'$, denn die Gerade g_8 kann zu diesen nicht gehören, da sie zu einem Oktupel führen würde, welches mit dem von K_1 eine ungerade Anzahl, nämlich 7, Treffgerade gemeinsam hat. Der gefundene Kegelschnitt stützt sich nun auf beziehentlich 6 und 2 von den Treffgeraden der beiden gegebenen Kegelschnitte und daher auf diese selbst in beziehentlich 0 und 2 Punkten.

Je 5 unter den 6 Geraden, welche nur eine Kurve des $D^{(2)}$ treffen, bestimmen also mit jeder der beiden Geraden g_7, g_8 einen Kegelschnitt, der K_1 gar nicht und K_2' zweimal begegnet. Wir erhalten mithin $6 \cdot 2 = 12$ Kegelschnitte; und ebenso viele, die zu K_2' windschief sind und K_1 in 2 Punkten treffen. Zu jenen gehören die Hauptoktupel 0_3 bis 0_{14}, zu diesen $0_3'$ bis $0_{14}'$. Wir haben damit erkannt:

6) Es gibt 24 Kegelschnitte K, welche sich auf die Kurven eines $D^{(2)}$ in beziehentlich 0 und 2 Punkten stützen.

Jedes der 1792 $D^{(2)}$ führt so zu 24 Tripeln $T^{(0,2,2)}$. Da ich aber zu jedem dieser Tripel von jedem seiner $D^{(2)}$ aus komme, so erhalte ich nur $\frac{1792 \cdot 24}{2} = 21504$ verschiedene solche Tripel, d. h. es gilt:

7) Es gibt 21504 $T^{(0,2,2)}$ auf der F_1^4.

37. Von den obigen 24 Kegelschnitten sind 12 zu K_1 windschief. (Sie treffen K_2' zweimal.) Ferner ist auch K_2 zu K_1 windschief. (K_2 hat mit K_2' mehr als 2 Punkte gemeinsam.) Es bleiben also von den 28 Kegelschnitten K, welche K_1 gar nicht begegnen noch 15 übrig, und dies können nur diejenigen sein, welche sich auf K_2' in 1 Punkte

stützen, da es solche, welche auch zu K_2' windschief sind, nicht gibt. Diese Kegelschnitte besitzen die Hauptoktupel 0_{15} bis 0_{29}. Ebenso viele Kegelschnitte finden wir dann, welche K_2' nicht treffen aber K_1 einmal begegnen, nämlich die mit den Oktupeln $0_{30}'$ bis $0_{44}'$. So hat sich also ergeben:

8) 30 Kegelschnitte K treffen die Kurven eines $D^{(2)}$ in 0 und 1 Punkte.

Von den 1792 $D^{(2)}$ gelange ich so zu $1792 \cdot 30 = 53760$ $T^{(0,1,2)}$, welche sämtlich unter einander verschieden sind, da jedes solche Tripel nur ein $D^{(2)}$ enthält.

9) Es gibt also 53760 K-Triepel $T^{(0,1,2)}$.

38. Die Genossen der ermittelten 30 Kegelschnitte, welche das $D^{(2)}$ zu einem $T^{(0,1,2}$ ergänzen, sind nun aber diejenigen, welche die des $D^{(2}$ in beziehentlich 1 und 2 Punkten schneiden. Ihre Hauptoktupel sind $0_{15}'$ bis $0_{29}'$ und 0_{30} bis 0_{44}. Wir können also sagen:

10) 30 Kegelschnitte K begegnen den Kurven eines $D^{(2)}$ in beziehentlich 1 und 2 Punkten.

Die 1792 $D^{(2)}$ liefern uns hiernach $1792 \cdot 30$ $T^{(1,2,2)}$. Von diesen fallen aber immer je 2 zusammen, da sich in jedem dieser Triepel $2D^{(2)}$ befinden und wir erhalten nur $1792 \cdot 15 = 26880$ verschiedene $T^{(1,2,2)}$.

11) Es gibt also 26880 K-Tripel $T^{(1,2,2)}$.

39. Die Sätze 4), 5), 6), 8), 10) haben gelehrt, wie sich unser Dupel zu $0+0+24+30+30 = 84$ der übrigen 126 Kegelschnitte verhält. Dazu kommen K_1' und K_2'. Es bleiben also noch 40 Kegelschnitte übrig. Da wir in obigen 86 diejenigen Kegelschnitte gefunden haben, welche sich auf die Kurven des $D^{(2)}$ in $0+0$, $0+1$, $0+2$, $1+2$, $2+2$ und $0+4$ Punkten stützen, so können die letzten 40 nur die sein, welche K_1 und K_2' in je 1 Punkte begegnen. Ihre Hauptoktupel sind 0_{45} bis 0_{64} und $0_{45}'$ bis $0_{64}'$. Es ergibt sich also:

12) Auf 40 Kegelschnitte K stützen sich die Kurven eines $D^{(2)}$ in je 1 Punkte.

Aus den 1792 Dupeln $D^{(2)}$ und den jeweiligen 40 Kegelschnitten K, welche die des Dupels je einmal treffen,

lassen sich hiernach $1792 \cdot 40 = 71680$ Tripel $T^{(1,1,2)}$ zusammensetzen, welche sämtlich unter einander verschieden sind, da jedes derselben nur ein $D^{(2)}$ enthält.

13) Es gibt also 71680 Tripel $T^{(1,1,2)}$.

40. Um ferner zu untersuchen, in wie vielen Punkten die Kurven eines $D^{(0)}$ den anderen Kegelschnitten begegnen, gehe ich aus von den zu einander windschiefen Kegelschnitten K_1 und K_2 mit den Hauptoktupeln

$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$$
$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7', g_8'.$$

Wir erkennen zunächst, dass jeder Kegelschnitt K, der K_1 und K_2' in je 1 Punkt trifft, auch K_2 in 1 Punkte schneidet, und umgekehrt jeder Kegelschnitt K, welcher K_1 und K_2 je einmal begegnet, auch mit K_2' einen Punkt gemeinsam hat. Die obigen 40 Kegelschnitte also, welche sich auf K_1 und K_2' (je) einmal stützen, sind diejenigen Kegelschnitte K, welche die Kurven unseres $D^{(0)}$ in je einem Punkte treffen. Es gilt mithin:

14) Auf die Kegelschnitte eines $D^{(0)}$ stützen sich 40 andere Kegelschnitte K gleichzeitig in je einem Punkte.

Da es 1792 $D^{(0)}$ gibt, und jedes $T^{(0,1,1)}$ ein und nur ein $D^{(0)}$ enthält, so erkennen wir:

15) Die Anzahl der $T^{(0,1,1)}$ ist $1792 \cdot 40 = 71680$.

41. Nach Satz 3) befindet sich auf der F_1^4 kein $T^{(0,0,2)}$. Daraus folgt:

16) Es gibt keinen Kegelschnitt K, welcher die Kurven eines $D^{(0)}$ in beziehentlich 0 und 2 Punkten trifft.

Die Kegelschnitte K ferner, welche die aus unseren $D^{(0)}$ je zweimal schneiden, sind diejenigen, welche das aus K_1 und K_2' bestehende $D^{(2)}$ zu einem $T^{(2,0,2)}$ ergänzen. Ihre Anzahl ist 12, wie wir bei Ableitung des Satzes 6) fanden. Es sind dies die mit den Hauptoktupeln $0_3'$ bis $0_{14}'$.

17) Die Kurven eines $D^{(0)}$ stützen sich auf 12 Kegelschnitte in je 2 Punkten.

Die Genossen dieser 12 Kegelschnitte, mit den Ok-

tupeln 0_3 bis 0_{14}, sind aber diejenigen, welche zu denen des gegebenen $D^{(0)}$ windschief sind.

18) Die Kurven eines $D^{(0)}$ sind also zu 12 anderen Kegelschnitten K gleichzeitig windschief.

Hieraus ergibt sich $\frac{1792 \cdot 12}{3} = 7168$ als Anzahl der Tripel $T^{(0,0,0)}$. Es gilt also:

19) Es gibt 7168 Tripel windschiefer Kegelschnitte K.

42. Die Kegelschnitte K ferner, welche K_1 gar nicht und K_2 einmal treffen, schneiden auch K_2' in einem Punkte. Es gibt deren 15, und diese gehören zu den Hauptoktupeln 0_{15} bis 0_{29} wie wir bei den Ableitungen Satz 8) lernten. Die Kegelschnitte K dagegen, welche K_1 einmal begegnen und zu K_2 windschief sind, sind diejenigen, welche mit K_1 und K_2 beziehentlich 1 und 2 Punkte gemeinsam haben. Dies sind die 15 Kegelschnitte K, welche sich auf die Hauptoktupel 0_{30} bis 0_{44} stützen, wie wir beim Beweise von Satz 10) erkannten.

20) Die Kegelschnitte eines $D^{(0)}$ treffen mithin 30 andere Kegelschnitte K in beziehentlich 0 und 1 Punkte.

Daraus folgt, da es 1792 $D^{(0)}$ gibt:

21) Die Anzahl der $T^{(0,0,1)}$ ist $\frac{1792 \cdot 30}{2} = 26880$.

43. Die Genossen der eben gefundenen 30 Kegelschnitte, nämlich die mit den Oktupeln $0_{15}'$ bis $0_{44}'$, sind nun ersichtlich diejenigen, welche denen aus unserem $D^{(0)}$ in beziehentlich 1 und 2 Punkten begegnen.

22) Die Kegelschnitte eines $D^{(0)}$ stützen sich folglich auf 30 andere Kegelschnitte K in beziehentlich 1 und 2 Punkten.

Hierdurch aber wird Satz 9) bestätigt, der 53760 als Anzahl der $T^{(0,1,2)}$ angibt.

44. Schliesslich habe ich noch zu untersuchen, wie die Kurven eines $D^{(1)}$ sich zu den übrigen Kegelschnitten

K verhalten. Ich will dabei ausgehen von den Kegelschnitten K_1 und K_{30} mit den Oktupeln:

$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$$
$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5', g_6', g_7', g_8'.$$

Da es 26880 $T^{(0,0,1)}$ und 4480 $D^{(1)}$ gibt, so muss jedes $D^{(1)}$ durch $\frac{26880}{4480} = 6$ Kegelschnitte K zu einem $T^{(0,0,1)}$ ergänzt werden.

Die 6 Kegelschnitte K, welche zu den Kurven des obigen $D^{(1)}$ windschief sind, findet man leicht in denjenigen, welche zu den Oktupeln O_2 bis O_6 und O_{15} gehören, wenn man in Betracht zieht, dass die Kurven eines $T^{(0,0,1)}$ 4 Treffgerade gemeinsam haben müssen, d. h. sich auf die 4 gemeinsamen Treffgeraden der beiden gegebenen Kurven stützen müssen, und dass ein Kegelschnitt, welcher unser $D^{(1)}$ zu einem $T^{(0,0,1)}$ ergänzt, ausserdem noch je 2 weitere Gerade aus den Oktupeln der Kurven des $D^{(1)}$ treffen muss. Es hat sich ergeben:

23) Es gibt 6 Kegelschnitte K, welche zu denen eines $D^{(1)}$ windschief sind.

45. Die Genossen der eben gefundenen 6 Kegelschnitte mit den Oktupeln O_2' bis O_6' und O_{15}' sind nun offenbar diejenigen, welche die des $D^{(1)}$ je zweimal treffen. Also gilt ferner:

24) Die Kegelschnitte eines $D^{(1)}$ stützen sich auf 6 andere Kegelschnitte K gleichzeitig in je 2 Punkten.

Nun bilden aber auch K_1' und K_{30} ein $D^{(1)}$. Die Kegelschnitte K, die dieses zu einem $T^{(0,1,2)}$ ergänzen, zerfallen dann in diejenigen, welche K_1' gar nicht und K_{30} zweimal treffen und in diejenigen, welche K_1' und K_{30} in beziehentlich 2 und 0 Punkten begegnen. Die ersteren sind aber offenbar die oben gefundenen 6 Kegelschnitte, welche K_1 und K_{30} je zweimal schneiden, und die letzteren sind die gleichfalls schon ermittelten Kurven 2. Ordnung K, welche zu K_1 und K_{30} windschief sind. Wie zu dem aus K_1' und K_{30} gebildeten, so gibt es dann zu jedem $D^{(1)}$ 12 Kegel-

schnitte K, welche mit ihm je ein $T^{(0,1,2)}$ bilden. Man erkennt leicht, dass die 12 Kegelschnitte, welche unser gegebenes $D^{(1)}$ zu Tripeln dieser Art ergänzen, sich stützen auf die Hauptoktupel O_{24} bis O_{29} und O'_{24} bis O'_{29}. Die Kurven eines $T^{(0,1,2)}$ müssen nämlich 2 Treffgerade gemeinsam haben, also 2 von den 4 Geraden, die sich schon auf K_1 und K_{30} stützen, und ausserdem muss ein Kegelschnitt, der mit K_1 und K_{30} zu einem $T^{(0,1,2)}$ zusammen gehört, um zu K_1 oder K_{30} windschief zu sein, noch diejenigen 4 Treffgeraden einer der beiden Kurven haben, welche diesen nicht gemeinsam sind. Es hat sich ergeben:

25) Zu einem $D^{(1)}$ gibt es 12 Kegelschnitte K, welche die eine Kurve des Dupels gar nicht und die andere zweimal treffen.

Hieraus folgt nochmals, dass 53760 die Anzahl der $T^{(0,1,2)}$ ist.

46. Von den zu K_1 windschiefen Kegelschnitten K haben wir schon 12 gefunden, nämlich diejenigen 6, welche K_{30} auch nicht treffen und die 6, welche K_{30} zweimal schneiden. Es bleiben also von den 28 zu K_1 windschiefen Kegelschnitten K noch 16 übrig, und diese müssen, da es solche, welche K_1 gar nicht und K_{30} in mehr als 2 Punkten begegnen, nicht geben kann, sich auf K_1 gar nicht und auf K_{30} in 1 Punkte stützen. Ebenso viele Kegelschnitte K gibt es dann natürlich, welche mit K_1 1 Punkt gemeinsam haben und mit K_{30} keinen. Wie man leicht nachweisen kann, stützen sich jene auf die Hauptoktupel O_7 bis O_{14}, O_{16} bis O_{23}, diese auf O_{31} bis O_{35} und O_{45} bis O_{52}.

26) 32 Kegelschnitte K treffen also diejenigen aus einem $D^{(1)}$ in beziehentlich 0 und 1 Punkte.

Hiernach gibt es 71680 $T^{(1,0,1)}$ wie schon Satz 15 aussagt.

Die Kegelschnitte K ferner, welche die Kurven unseres $D^{(1)}$ in 2 und 1 Punkte schneiden, sind identisch mit den Genossen der eben gefundenen 32 Kegelschnitte, welche sie in 0 und 1 Punkte treffen, und haben zu Hauptoktupeln O'_7 bis O'_{14}, O'_{16} bis O'_{23}, O'_{35} bis O'_{38} und O'_{45} bis O'_{52}.

Auch hieraus folgt, dass es 71680 $T^{(1,1,2)}$ gibt, wie schon Satz 13) lehrt.

27) Es gibt also 32 Kegelschnitte K, welche sich auf die Kurven eines $D^{(1)}$ in beziehentlich 1 und 2 Punkten stützen.

Die Sätze 23) bis 27) haben uns $6+6+12+32+32 = 88$ Kegelschnitte K geliefert, nämlich diejenigen, welche die Kurven unseres $D^{(1)}$ in $0+0$, $0+1$, $0+2$, $1+2$, $2+2$ Punkten treffen. Dazu kommen noch ausser K_1 und K_{30} selbst ihre Genossen K_1' und K_{30}', welche sie in $0+3$ Punkten schneiden. Auf die übrig bleibenden $128-92 = 36$ Kegelschnitte müssen sich also K_1 und K_{30} in je 1 Punkte stützen. Es sind dies die Kegelschnitte mit den Hauptoktupeln 0_{39} bis 0_{44}, $0_{39}'$ bis $0_{44}'$, 0_{53} bis 0_{64} und $0_{53}'$ bis $0_{64}'$.

28) Die Kegelschnitte eines $D^{(1)}$ treffen also 36 Kegelschnitte K je einmal.

Die 4480 $D^{(1)}$ führen so zu $4480 \cdot 36$ Tripeln $T^{(1,1,1)}$. Hierbei entsteht aber jedes Tripel dreifach, da jedes $T^{(1,1,1)}$ $3\,D^{(1)}$ enthält, und es gibt nur $\frac{4480 \cdot 36}{3} = 53760$ verschiedene.

29) Die Anzahl der Tripel $T^{(1,1,1)}$ ist mithin 53760.

47. Um die gefundenen Resultate zusammenzufassen, kann man folgende Tabelle aufstellen, welche für jedes Dupel $D^{(\alpha)}$ die Anzahl der Kegelschnitte angibt, welche den Kurven in beziehentlich β und γ Punkten begegnen.

30) Die Anzahl der Kegelschnitte K, welche die Kurven eines $D^{(\alpha)}$ in $\beta+\gamma$ Punkten treffen, ist bei

$0+0$	$0+1$	$1+1$	$0+2$	$1+2$	$2+2$	$=\beta+\gamma$ Punkten
12	30	40	0	30	12	$\alpha = 0$
6	32	36	12	32	6	$\alpha = 1$
0	30	40	24	30	0	$\alpha = 2$.

Schliesslich gilt nach den Sätzen 19), 21), 15), 29), 3), 9), 13), 7), 11), 2):

31) Die Anzahlen der Tripel $T^{(0,0,0)}$, $T^{(0,0,1)}$, $T^{(0,1,1)}$ $T^{(1,1,1)}$, $T^{(0,0,2)}$, $T^{(0,1,2)}$, $T^{(1,1,2)}$, $T^{(0,2,2)}$, $T^{(1,2,2)}$, $T^{(2,2,2)}$ sind beziehentlich 7168, 26880, 71680, 53760, 0, 53760, 71680, 21504, 26880, 0.

§ 6.

Die Quadrupel von Kegelschnitten K.

48. Ein System von vier Kegelschnitten K nenne ich ein K-Quadrupel und bezeichne dasselbe mit $Q^{(\alpha)}$ wenn sich die Kurven zu je zweien in α Punkten treffen.

Die sämtlichen K-Quadrupel in ihrer grossen Mannigfaltigkeit bezüglich der Anzahlen ihrer gegenseitigen Schnittpunkte zu behandeln, würde zu weit führen. Ich untersuche nur die $Q^{(\alpha)}$ und zwar, da es ein Q^{2} nicht geben kann, weil es schon kein $T^{2,2,2}$ gibt, nur die Q^{1} und $Q^{(0)}$.

Die Mannigfaltigkeit der K-Quadrupel wird noch erhöht durch folgenden Umstand:

Während bei den K-Dupeln und -Tripeln die Anzahlen der gemeinsamen Treffgeraden bestimmt sind durch die Anzahlen der Schnittpunkte und bei den Dupeln auch umgekehrt diese durch jene, ist bei den K-Quadrupeln beides nicht mehr der Fall. Dies wird sich im folgenden bei den $Q^{(1)}$ und $Q^{(0)}$ zeigen.

49. Um zu Quadrupeln $Q^{(1)}$ zu gelangen, gehe ich von dem Tripel $T^{(1,1,1)}$ aus, z. B. von den Kegelschnitten K_1, K_{30}, K_{39} mit den Oktupeln:

$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8;$$
$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5', g_6', g_7', g_8';$$
$$g_1, g_2, g_3', g_4', g_5, g_6, g_7', g_8';$$

und den gemeinsamen Treffgeraden g_1, g_2 und suche die Kegelschnitte K_i, welche diesen in je einem Punkte begegnen. Ist K_i ein solcher, so muss er aus jedem der

gegebenen Oktupel 4 Gerade treffen. Da aber nur 2 Gerade allen 3 Oktupeln angehören, so können die 4 Oktupel von K_i, K_1, K_{30}, K_{39} auch nicht mehr Gerade gemeinsam haben.

Ein $Q^{(1)}$ kann also nur 2, 1 oder 0 gemeinsame Treffgerade besitzen.

Nehmen wir zunächst an, dass g_1 und g_2 beide auch K_i begegnen. Da je 3 von unseren 4 Kurven ein $T^{(1,1,1)}$ bilden, und die Kegelschnitte eines solchen auch nur 2 Treffgerade gemeinsam haben, so muss K_i zu g_3 und g_4 windschief sein, da diese schon K_1 und K_{30} schneiden, ebenso ferner zu g_5 und g_6, weil diese sich schon auf K_1 und K_{39} stützen und schliesslich zu g_7' und g_8', da diese bereits den Oktupeln 0_{30} und 0_{39} angehören. Das zu K_i gehörige Oktupel kann also nur aus den Geraden g_1, g_2, g_3', g_4', g_5', g_6', g_7, g_8 bestehen. Diese bilden in der Tat ein Hauptoktupel, nämlich $0_{44}'$, und bestimmen auch einen Kegelschnitt der den gegebenen je einmal begegnet, denn dieses Oktupel hat mit jedem der gegebenen eine gerade Anzahl von Geraden gemein, nämlich je 4.

Jedes $T^{(1,1,1)}$ führt also zu einem $Q^{(1)}$, deren Kurven 2 gemeinsame Treffgerade haben.

50. Der Genosse K_{44} des eben gefundenen Kegelschnittes ferner trifft die gegebenen Kegelschnitte auch je einmal, aber er ist zu g_1 und g_2 windschief.

Jedes $T^{(1,1,1)}$ gehört also einem $Q^{(1)}$ an, deren Kurven keine gemeinsame Treffgerade besitzen.

51. Schliesslich gibt es noch Kegelschnitte K, welche denjenigen unseres $T^{(1,1,1)}$ gleichfalls je einmal begegnen und von den gemeinsamen Treffgeraden derselben eine schneiden. Nehmen wir an, K_i wäre ein solcher, so begegnet er den Geraden g_1, g_2' oder g_1', g_2. Er bildet aber mit je 2 von den gegebenen Kurven ein $T^{(1,1,1)}$ und muss daher von den weiteren je 2 gemeinsamen Treffgeraden der 3 Dupel K_1, K_{30}; K_1, K_{39} und K_{30}, K_{39} noch eine und nur eine treffen. K_i muss sich also ausser auf g_1, g_2' oder g_1', g_2 noch stützen auf g_3, g_4' oder g_3', g_4, ferner auf g_5, g_6' oder g_5', g_6 und auf g_7, g_8' oder g_7', g_8.

Nimmt man aber umgekehrt aus jedem dieser 4 Dupel von Geradendupeln eins heraus, so erhält man, wie man leicht erkennt, ein Geradenoktupel, welches mit jedem der 3 gegebenen Kegelschnitte 4 Gerade gemeinsam hat, und nach den Sätzen 13) in Nr. 30 und 9) in Nr. 29 ein Hauptoktupel ist, welches zu einem Kegelschnitt K gehört, der jeden aus unseren $T^{(1,1,1)}$ einmal schneidet. Dies ist auf $2^4 = 16$ verschiedene Weisen möglich. Ich gelange dabei zu den Oktupeln 0_{55} bis 0_{58}, 0_{61} bis 0_{64}, $0'_{55}$ bis $0'_{58}$, $0'_{61}$ bis $0'_{64}$.

Es gibt also 16 Kegelschnitte K, welche denen eines $T^{(1,1,1)}$ je einmal begegnen und sich auf eine von den gemeinsamen Treffgeraden desselben stützen.

Da jedes $Q^{(1)}$ vier $T^{(1,1,1)}$ enthält, so gelange ich von den 53760 Tripeln dieser Art zu $\frac{53760 \cdot 18}{4} = 241920$ solchen Quadrupeln, und zwar zu beziehentlich $\frac{53760 \cdot 1}{4} = 13440$, 13440 und $\frac{53760 \cdot 16}{4} = 215040$ von den 3 verschiedenen Gattungen.

52. Indem wir die Resultate zusammenfassen, können wir also sagen:

1) Jedes K-Tripel $T^{(1,1,1)}$ wird durch 18 andere Kegelschnitte K zu K-Quadrupeln $Q^{(1)}$ ergänzt. In einem dieser Quadrupel haben die Kurven keine, in einem anderen 2 und in den übrigen 16 eine gemeinsame Treffgerade.

2) Es gibt 241920 K-Quadrupel $Q^{(1)}$. In 13440 derselben stützen sich die 4 Kurven auf keine, in 215040 auf eine und in den übrigen 13440 auf 2 Gerade der Fläche gemeinsam.

53. Um ferner die Quadrupel windschiefer Kegelschnitte K zu untersuchen, gehe ich aus von dem Tripel $T^{(0,0,0)}$, welches besteht aus den Kegelschnitten K_1, K_2, K_3 mit den Oktupeln

$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8;$$
$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7', g_8';$$
$$g_1, g_2', g_3', g_4, g_5', g_6', g_7, g_8'.$$

Da nun drei windschiefe Kegelschnitte K 5 gemeinsame Gerade haben, so kann ein $Q^{(0)}$ deren auch nicht mehr haben. Soll nun ein Kegelschnitt K_i, der sich auf die sämtlichen 5 gemeinsamen Treffgeraden der gegebenen Kegelschnitte stützt, zu diesen Kurven windschief sein, so muss er aus jedem der 3 obigen Oktupel noch eine weitere Gerade treffen, aber keine, welche zweien von ihnen gemeinsam ist. Daher muss das Oktupel von K_i bestehen aus den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 und g_6', g_7', g_8'. In der Tat bilden auch diese Geraden wie man leicht erkennt ein Hauptoktupel, welches mit jedem der gegebenen 6 Gerade gemeinsam hat und daher einen Kegelschnitt K bestimmt, der zu K_1, K_2, K_3 windschief ist. Es ist dies K_4. Zugleich haben wir gesehen, dass das der einzige Kegelschnitt dieser Art ist.

Es gibt also zu jedem $T^{(0,0,0)}$ einen Kegelschnitt, der dasselbe zu einem $Q^{(0)}$ ergänzt und mit demselben 5 Treffgerade gemeinsam hat.

54. Ferner existieren Kegelschnitte K, die zu den gegebenen windschief sind, aber nur 4 von den gemeinsamen Treffgeraden derselben begegnen. Soll K_i ein solcher sein, und sich beispielsweise auf die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 stützen, so muss er mit je 2 von den gegebenen Kurven noch eine Treffgerade gemeinsam haben, muss also den Geraden g_6, g_7, g_8' begegnen. Umgekehrt erhalte ich, wenn ich zu 4 von den 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 und der Genossin der übrig bleibenden 5. die Geraden g_6, g_7, g_8 hinzufüge, immer ein Hauptoktupel, welches mit jedem der gegebenen 6 Gerade gemeinsam hat. Ich gelange auf diesem Wege zu den Oktupeln O_5, O_7, O_9, O_{11}, O_{13}.

Jedes $T^{(0,0,0)}$ gehört also zu 5 $Q^{(0)}$ mit 4 gemeinsamen Treffgeraden.

55. Weniger als 4 gemeinsame Treffgerade können aber 4 windschiefe Kegelschnitte K nicht haben. Stützte

sich nämlich z. B. ein zu den gegebenen windschiefer Kegelschnitt K_1 nur auf 3 von den 5 gemeinsamen Geraden derselben, so dürfte er sich von keinem unter ihnen durch eine weitere Treffgerade unterscheiden, weil er 6 von den Geraden eines jeden ihrer Oktupel treffen müsste. Das ist aber nicht möglich, da er doch aus dem 6., 7. und 8. Paare je eine Gerade schneiden muss und die 3 gegebenen Kegelschnitte in diesen Paaren keine gemeinsame Gerade mehr haben.

Es gibt also nur Quadrupel windschiefer Kegelschnitte mit 4 oder 5 gemeinsamen Treffgeraden.

56. Die 7168 $T^{(0,0,0)}$ führen so zu $\frac{7168}{4} = 1792\ Q^{(0)}$ mit 5 und $\frac{7168 \cdot 5}{4} = 8960\ Q^{(0)}$ mit 4 gemeinsamen Treffgeraden.

Es gelten somit die Sätze:

3) Ein $T^{(0,0,0)}$ wird durch 6 Kegelschnitte K zu einem $Q^{(0)}$ ergänzt. Eins von diesen 6 Quadrupeln hat 5 gemeinsame Treffgerade, die übrigen nur 4.

4) Die Anzahl der Quadrupel windschiefer Kegelschnitte ist 10752, und zwar 1792 mit 5 und 8960 mit 4 gemeinsamen Treffgeraden.

Wir ersehen aus dem letzten Satze, dass die Anzahl der $Q^{(0)}$ mit 5 gemeinsamen Treffgeraden gleich der von den $D^{(0)}$ ist. Der Grund hierfür ist leicht einzusehen. Jedes $D^{(0)}$ gehört zu 6 solchen $Q^{(0)}$. Die 12 zu einem $D^{(0)}$ windschiefen Kegelschnitte K zerfallen nämlich in 6 $D^{(0)}$ welche mit dem ersten ein $Q^{(0)}$ dieser Art bilden und da umgekehrt jedes solche $Q^{(0)}$ 6 $D^{(0)}$ enthält, so erhalten wir gerade so viele $Q^{(0)}$ mit 5 gemeinsamen Treffgeraden wie $D^{(0)}$. Die 12 zu dem aus K_1, K_2 bestehenden $D^{(0)}$ windschiefen Kegelschnitte K_3 bis K_{14} z. B. zerfallen in die 6 $D^{(0)}$: K_3, K_4; K_5, K_6; K_7, K_8; K_9, K_{10}; K_{11}, K_{12}; K_{13}, K_{14}.

§ 7

Systeme von windschiefen Kegelschnitten K.

57. Wir haben oben gefunden, dass sich von den 6 Kegelschnitten K_i die zu denen eines $T^{(0,0,0)}$ windschief sind, einer auf die sämtlichen 5 gemeinsamen Treffgeraden des Tripels stützt, die anderen 5 aber nur auf 4 dieser Geraden. Ersterer möge K_i heissen. Ist dann K_l eine von den letzteren 5 Kurven, so kann K_i nicht zu K_l windschief sein. Da nämlich die Kurven des Tripels und K_i gleichzeitig nur von 4 Geraden aus dem zu K_l gehörigen Hauptoktupel O_l getroffen werden, und sämtlich zu einer weiteren Geraden aus demselben windschief sind, so müsste jede von jenen 4 Kurven bei Windschiefheit zu K_i noch 2 der 3 übrigen Geraden des O_l begegnen, d. h. K_l müsste sich von vier Kegelschnitten durch je eine von diesen drei Treffgeraden unterscheiden. Nun kann dies aber ersichtlich nicht bei jeder der 4 Kurven durch eine andere Gerade geschehen, da es deren nur 3 gibt. Dennoch aber müsste gerade dies der Fall sein, weil nämlich sonst, d. h. wenn 2 jener 4 Kegelschnitte zu einer und derselben von diesen 3 Geraden windschief wären, K_l mit denselben die übrigen 2 von unseren Geraden gemeinsam haben müsste, noch ausser den oben ermittelten 4 von den 5 gemeinsamen Treffgeraden des Tripels, also insgesamt mehr als 5. Der zu einem $T^{(0,0,0)}$ windschiefe Kegelschnitt K also, welcher sich auf die sämtlichen 5 gemeinsamen Treffgeraden dieses Tripels stützt, ist zu keinem der 5 anderen Kegelschnitte windschief, welche das $T^{(0,0,0)}$ gleichfalls nicht treffen, aber nur je 4 der gemeinsamen Treffgeraden des Tripels begegnen.

1) Zu einem Quadrupel windschiefer Kegelschnitte K mit 5 gemeinsamen Treffgeraden gibt es mithin keinen windschiefen Kegelschnitt K. Keines der 1792 Quadrupel dieser Art gehört einem System von mehr als 4 windschiefen Kegelschnitten K an.

58. Die Kurven eines $T^{(0,0,0)}$ stimmen überein in den Treffgeraden aus 5 Geradenpaaren und je 2 von ihnen noch in der aus einem weiteren, und zwar stammt diese bei jedem der 3 im Tripel enthaltenen Dupel aus einem anderen unter den 3 übrig bleibenden Geradenpaaren, da der jeweilige dritte Kegelschnitt nicht auch dieselbe Gerade treffen darf. Diese 3 Geraden nun, die sich auf je 2 Kurven des Tripels stützen, müssen dann aber auch sämtlich den 5 Kegelschnitten begegnen, die zu dem $T^{(0,0,0)}$ windschief sind, aber nur je 4 von den gemeinsamen Treffgeraden des Tripels schneiden, weil nämlich jede von diesen Kurven mit jedem Dupel auch ein $T^{0,0,0}$ bildet und daher mit jedem Dupel 5 Treffgerade gemeinsam haben muss. Unsere 5 Kegelschnitte stützen sich also sämtlich auf 3 Gerade der Fläche, die nicht zu den 5 gemeinsamen Treffgeraden des Tripels gehören: je 2 von ihnen aber treffen auch von diesen 5 Geraden noch 3, also insgesamt 6 Gerade, und sind daher zueinander sämtlich windschief[1]). Es gilt mithin:

2) Die 5 Kegelschnitte K, welche zu denen eines $T^{(0,0,0)}$ windschief sind und sich nur auf je 4 von den 5 gemeinsamen Treffgeraden dieses Tripels stützen, treffen einander auch nicht, sie bilden mit dem Tripel ein System von 8 windschiefen Kegelschnitten oder

3) Eine Quadrupel windschiefer Kegelschnitte K mit 4 gemeinsamen Treffgeraden ist windschief zu 4 anderen Kegelschnitten K, die ein Quadrupel derselben Art bilden.

59. Jedes System von mehr als 4 windschiefen Kegelschnitten K muss sich somit zusammensetzen lassen aus einem der 8960 $Q^{(0)}$ mit je 4 gemeinsamen Treffgeraden und den jeweiligen 4 zu dem Quadrupel windschiefen Kegelschnitten. Hieraus ergibt sich dann der folgende Satz, in welchem ich unter Quintupeln, Sextupeln, Sep-

---

1) Vgl. die unten folgende Tabelle der Hauptoktupel von 8 windschiefen Kegelschnitten K in Nr. 61.

tupeln, Oktupeln Systeme von beziehentlich 5, 6, 7, 8 Kegelschnitten K verstehe:

4) Quintupel, Sextupel, Septupel, Oktupel windschiefer Kegelschnitte K gibt es auf der F_1^4 beziehentlich

$$7168 \left(= \frac{8960 \cdot 4}{5} \right), \; 3584 \left(= \frac{7168 \cdot 3}{6} \right),$$

$$1024 \left(= \frac{3584 \cdot 2}{7} \right), \; 128 \left(= \frac{1024}{8} \right)$$

Ferner haben wir erkannt:

5) Ein System von mehr als 3 sich nicht treffenden Kegelschnitten K bildet mit den zu demselben windschiefen Kegelschnitten ein Oktupel solcher Kurven, ebenso jedes $T^{(0,0,0)}$ mit denjenigen 5 Kegelschnitten K, die nur je 4 der gemeinsamen Treffgeraden des Tripels begegnen.

Schliesslich haben die letzten Untersuchungen gelehrt:

6) Ein System von mehr als 3 sich nicht begegnenden Kegelschnitten K gehört einem und nur einem Oktupel von Kurven dieser Art an mit Ausnahme der Quadrupel windschiefer Kegelschnitte K mit 5 gemeinsamen Treffgeraden, die keinem solchen Oktupel angehören.

60. Zu einem $D^{(0)}$ sind 12 Kegelschnitte K windschief. Ergänze ich das $D^{(0)}$ durch einen der letzteren, etwa K_i, zu einem $T^{(0,0,0)}$, so bestimmt dieses unter den anderen 11 Kurven 5, welche weder das Tripel noch einander treffen. Unter den übrigen 6 befindet sich dann noch eine, die zwar zu $T^{(0,0,0)}$ aber nicht zu den obigen 5 Kegelschnitten windschief ist, nämlich diejenige, welche sich auf die sämtlichen 5 gemeinsamen Treffgeraden des $T^{(0,0,0)}$ stützt. Sie möge K_l heissen. Das Tripel aber, welches von K_l und dem $D^{(0)}$ gebildet wird, gehört auch einem Oktupel windschiefer Kurven an, und es kann zu diesem Oktupel nur durch den von den obigen 12 übrig gebliebenen 5

Kegelschnitte ergänzt werden, da zu K_i unter den bisher erwähnten 7 nur K_i windschief ist, und dieser wieder zu keiner anderen von unseren 12 Kurven als zu K_i.

Die zu dem $D^{(0)}$ windschiefen 12 Kegelschnitte K verteilen sich also auf 2 Sextupel auch einander nicht treffender Kurven in der Weise, dass jeder von ihnen einem und nur einem Sextupel angehört.

Da es aber zu jedem $T^{(0,0,0)}$ einen Kegelschnitt K giebt, der zwar zu dem Tripel windschief ist, aber zu keinem der übrigen Kegelschnitte K, so gibt es wie zu K_i und K_i auch zu jedem anderen Kegelschnitt aus einem der beiden Sextupel, immer im anderen einen und nur einen der ihm nicht begegnet.

Unsere 12 Kurven bilden daher ferner 6 Dupel windschiefer Kegelschnitte, die das $D^{(0)}$ zu einem Quadrupel solcher Kurven mit 5 gemeinsamen Treffgeraden ergänzen, und zwar so, dass jede der 12 Kurven einem und nur einem dieser Dupel angehört und windschief ist zu einer und nur einer aus jedem der anderen. Endlich geht aus den vorangegangenen Betrachtungen auch hervor, dass jedes $D^{(0)}$ genau 2 Oktupeln und 6 Quadrupeln dieser Art angehört. Wir können unsere Ergebnisse zusammenfassen in dem Satz:

7) Zwei windschiefe Kegelschnitte K gehören 2 Oktupeln windschiefer Kegelschnitte K an und 6 Quadrupeln ebensolcher Kurven mit 5 gemeinsamen Treffgeraden. Diese Quadrupel und jene Oktupel werden gebildet von dem $D^{(0)}$ und den 12 Kegelschnitten K, die dem Dupel nicht begegnen.

So finden wir z. B. die Kegelschnitte K_1, K_2 mit den Oktupeln

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8$$
$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8'$$

in den beiden Kegelschnitt-Oktupeln

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_5,\ K_7,\ K_9,\ K_{11},\ K_{13}$$
$$K_1,\ K_2,\ K_4,\ K_6,\ K_8,\ K_{10},\ K_{12},\ K_{14}$$

mit den Geradenoktupeln

$$\begin{array}{l} g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8 \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6',\ g_7,\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5',\ g_6,\ g_7,\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4',\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3',\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8' \\ g_1,\ g_2',\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8' \\ g_1',\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8' \end{array}$$

und:

$$\begin{array}{l} g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8 \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6',\ g_7',\ g_8 \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5',\ g_6,\ g_7',\ g_8 \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4',\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8 \\ g_1,\ g_2,\ g_3',\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8 \\ g_1,\ g_2',\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8 \\ g_1',\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8 \end{array}$$

sowie den 6 Kegelschnittquadrupeln

$$\begin{array}{llll} K_1, & K_2, & K_3, & K_4; \\ K_1, & K_2, & K_7, & K_8; \\ K_1, & K_2, & K_{11}, & K_{12}; \end{array} \qquad \begin{array}{llll} K_1, & K_2, & K_5, & K_6 \\ K_1, & K_2, & K_9, & K_{10} \\ K_1, & K_2, & K_{13}, & K_{14} \end{array}$$

mit den Geradenoktupeln:

$$\begin{array}{l} g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8 \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6',\ g_7,\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6',\ g_7',\ g_8; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8 \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5',\ g_6,\ g_7,\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5',\ g,\ g_7',\ g_8; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8 \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4',\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_8' \\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4',\ g_5,\ g_6,\ g_7',\ g_8; \end{array}$$

$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$
$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7', g_8'$
$g_1, g_2, g_3', g_4, g_5, g_6, g_7, g_8'$
$g_1, g_2, g_3', g_4, g_5, g_6, g_7', g_8$;

$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$
$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7', g_8'$
$g_1, g_2', g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8'$
$g_1, g_2', g_3, g_4, g_5, g_6, g_7', g_8$;

$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$
$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7', g_8'$
$g_1', g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8'$
$g_1', g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7', g_8$

Jede dieser 12 Kurven gehört genau einem der Oktupel und einem der Quadrupel an und ist windschief zu einer und nur einer in jedem anderen Oktupel beziehungsweise Quadrupel.

61. Sieben windschiefe Gerade bestimmen einen Kegelschnitt K, nämlich denjenigen, der sich auf sie stützt. Ersetze ich aber der Reihe nach jede der 7 Geraden durch ihre Genossin, so erhalte ich 7 weitere Sextupel windschiefer Geraden, welche 7 andere Kegelschnitte K bestimmen, die mit dem ersten je 6 Treffgerade gemeinsam haben, und daher demselben nicht begegnen. Diese 7 Kurven sind aber auch zu einander windschief, da je 2 von den Sextupeln in 5 Geraden übereinstimmen und die zugehörigen Hauptoktupel dann in 6 Geraden, da sich 2 solche nur durch eine gerade Anzahl von Geraden unterscheiden können.

Die Hauptoktupel von 8 windschiefen Kegelschnitten kann man also bei Kenntnis von einem derselben auf folgende Weise herstellen: Ich gehe von 7 Geraden, etwa $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7$ aus, von denen ich weiss, dass sie durch eine 8te Gerade, sagen wir g_8, zu einem Hauptoktupel ergänzt werden. Mit der Genossin dieser Geraden, g_8', bilden die gegebenen dann ein Nebenoktupel. Setze ich dann nach der Reihe an Stelle einer jeden der 8 Geraden desselben

die Genossin, so erhalte ich die gesuchten Hauptoktupel. So gelange ich z. B. von dem Nebenoktupel $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8'$ zu den Hauptoktupeln

$$
\begin{array}{l}
g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8;\\
g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7', g_8';\\
g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6', g_7, g_8';\\
g_1, g_2, g_3, g_4, g_5', g_6, g_7, g_8';\\
g_1, g_2, g_3, g_4', g_5, g_6, g_7, g_8';\\
g_1, g_2, g_3', g_4, g_5, g_6, g_7, g_8';\\
g_1, g_2', g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8';\\
g_1', g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8';
\end{array}
$$

welche zu 8 windschiefen Kegelschnitten gehören.

62. Da sich nun unter den 8 Geraden, auf welche sich ein Kegelschnitt stützt, 8 Sextupel bilden lassen, und jedes derselben ein Oktupel windschiefer Kegelschnitte K bestimmt, so gehört jeder Kegelschnitt K 8 Oktupeln dieser Art an. Jeder Kegelschnitt K führt so zu 8 solcher Oktupeln, aber umgekehrt lässt sich jedes Oktupel in dieser Weise auch achtmal herstellen, da es 8 Kegelschnitte enthält. Hieraus erklärt sich die oben ermittelte Tatsache, dass die Zahl der Oktupel windschiefer Kegelschnitte gleich derjenigen dieser Kurven selbst ist.

Unser Ergebnis ist:

8) Jeder Kegelschnitt K gehört 8 Oktupeln solcher Kurven an, die sich nicht treffen.

63. Aus einem Nebenoktupel erhalte ich die Hauptoktupel von 8 windschiefen Kegelschnitten K, wenn ich zu je 7 Graden des ersteren das zugehörige Hauptoktupel bestimme mittels Ersetzen der 8ten Geraden durch ihre Genossin. Da nun jedes Oktupel windschiefer Kegelschnitte K sich aus einem in ihm enthaltenen Kurventripel und den 5 Kegelschnitten darstellen lässt, die zu dem Tripel windschief sind, und diese 5 Kurven sich nur auf je 4 der 5 gemeinsamen Treffgeraden stützen und unter einander sämtlich 3 Treffgerade gemeinsam haben, die nur 2 Kurven des Tripels begegnen, so erkennt man umgekehrt leicht, dass zu jedem Oktupel windschiefer Kegelschnitte K ein

Nebenoktupel gehört, welches aus jedem der 8 zugehörigen Hauptoktupel 7 Gerade enthält, und zwar alle diejenigen Geraden, welche sich auf 2 oder mehr von den 8 Kurven stützen.

Daraus folgt aber für die Anzahlen der gemeinsamen Treffgeraden derjenigen Systeme windschiefer Kegelschnitte K, welche Oktupeln solcher Kurven angehören, der Satz:

9) Jedes System von $n > 1$ windschiefen Kegelschnitten K hat $8-n$ gemeinsame Treffgerade mit Ausnahme derjenigen 1792 von den 10752 Quadrupeln solcher Kurven, welche je 5 gemeinsame Treffgerade besitzen.

§ 8.

Die auf der Fläche vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden gelegenen 448 einzelnen Raumkurven dritter Ordnung R^3.

64. Drei windschiefe Gerade g der F_1^4, etwa g_1, g_2, g_3 bestimmen eine Fläche zweiter Ordnung F^2, welche ausser diesen 3 Geraden auch die Doppelgerade d der F_1^4 trägt, da sie durch deren 3 Begegnungspunkte mit den g hindurchgeht. Die F^2 durchdringt die Fläche 4. Ordnung ausser in diesen 4 eine Schnittkurve 5. Ordnung darstellenden Geraden noch in einer Raumkurve 3. Ordnung R^3. Eine beliebige durch die d gelegte Ebene schneidet die Fläche 2. Ordnung noch in einer Geraden h. Diese stösst in die F_1^4 4 Punkte ein, welche als Punkte beider Flächen auf der aus d, g_1, g_2, g_3 und R^3 bestehenden Schnittkurve liegen müssen. Unter ihnen zählt der Schnittpunkt von d und h doppelt. Die beiden übrigen können, da h zu g_1, g_2, g_3 windschief ist, nur auf R^3 liegen. Unsere kubische Kurve stützt sich hiernach in 2 Punkten auf die h und in ihrem 3. Schnittpunkte mit der Ebene (h, d) auf die d.

Die gefundene R^3 trifft also die d einmal und die Geraden g_1, g_2, g_3 als Schargenossinnen der h zweimal.

Zu den Paargenossinnen von g_1, g_2, g_3 ist die R^3 aber

windschief, denn die 3 Punkte z. B. in denen die Kurve die Ebene von d, g_1, g_1' durchdringt, liegen sämtlich auf d und g_1.

Die übrigen 10 Geraden g der F_1^4 begegnen der R^3 einmal, da von den beiden Punkten, welche eine solche Gerade in die F^2 einstösst, auf g_1, g_2, g_3 keiner und auf d nur einer liegt.

Mit Bezugnahme auf die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit der R^3 will ich die 3 Geraden g_1, g_2, g_3 mit $g^{(2)}$ bezeichnen, deren Paargenossinnen mit $g^{(0)}$ und die übrigen 10 Geraden g der F_1^4 mit $g^{(1)}$.

65. Es ergibt sich ferner:

Ein Kegelschnitt K der F_1^4, welcher sich auf i der $g^{(2)}$ unserer R^3 stützt, hat mit dieser $3-i$ Punkte gemeinsam.

Von den 4 Schnittpunkten eines solchen Kegelschnittes mit der F^2 nämlich liegen i auf g_1, g_2, g_3, eine auf d und die übrigen $3-i$ können dann nur Punkte der R^3 sein.

Die R^3 begegnet demnach einem Kegelschnitt K der F_1^4 in 0, 1, 2 oder 3 Punkten, je nachdem dieser 3, 2, 1 oder 0 ihrer $g^{(2)}$ schneidet.

Unsere Raumkurve 3. Ordnung trifft also die $2^{7-3} = 16$ Kegelschnitte K der Fläche, welche sich auf ihre $3g^{(2)}$ stützen, gar nicht, deren 16 Ebenengenossen, die zu sämtlichen $g^{(2)}$ windschief sind, dreimal und, da sich die Anzahl ihrer Begegnungspunkte mit den Kegelschnitten eines K-Paares zu der Zahl 3 ihrer in der Ebene desselben gelegenen Punkte ergänzen müssen, aus jedem der übrigen $\frac{128-32}{2} = 48$ Paare einen Kegelschnitt einmal und den anderen doppelt.

Die Kegelschnitte S schliesslich auf der F_1^4 treffen die R^3 in je 2 Punkten, denn, da von den 3 Punkten der R^3, welche in die Ebene eines S fallen, nur einer auf d liegt, so müssen die 2 anderen von S getragen werden.

Je 3 windschiefe Gerade der F_1^4 führen zu einer solchen Raumkurve 3. Ordnung. Da es in 3 Geradenpaaren $2^3 = 8$ Tripel windschiefer Geraden gibt, und sich

aus den 8 Geradenpaaren der Fläche auf 56 verschiedene Weisen 3 herausgreifen lassen, so erhalten wir auf der F_1^4 $448 = 8 \cdot 56$ kubische Raumkurven R^3, welche die Doppelgerade der Fläche einmal treffen.

66. Nun bildet aber jede kubische Raumkurve auf der F_1^4, welche sich auf die Doppelgerade d in einem Punkte stützt, mit der d eine Raumkurve 4. Ordnung zweiter Art und bestimmt so eine Fläche 2. Ordnung F^2. Ein beliebiger ebener Schnitt der F_1^4 durchdringt dann die F^2 in 8 Punkten. Unter ihnen befindet sich der auf der d gelegene Doppelpunkt der C_1^4 und die 3 Punkte, welche die R^3 in die Ebene der C_1^4 einstösst. Die übrigen $8-2-3 = 3$ Punkte liegen ausserhalb von d und R^3. Ist P einer von ihnen, so gehen durch denselben 2 Gerade der F^2, aus jeder der beiden Regelschaaren auf F^2 eine. Die Gerade der einen schneidet die R^3 einmal, die der anderen zweimal; und zwar trifft die Gerade aus derjenigen Schar, welcher die d angehört, wie diese, die R^3 in einem, und die aus der anderen in zwei Punkten. Die letztere trägt mithin ausser P und dem doppelt zu zählenden Punkt auf d noch 2 Punkte auf R^3, also im ganzen 5 Punkte der F_1^4, d. h. sie gehört auch dieser Fläche an. So erhalten wir 3 Gerade, welche beiden Flächen gemeinsam sind und die R^3 zweimal treffen. Sie sind zu einander windschief, da sie derselben Regelschar angehören und bilden also eins der obigen 448 Geradentripel, die uns zu den 448 kubischen Raumkurven führten. Die F^2 ist daher auch eine der zugehörigen Flächen 2. Ordnung, und die R^3 eine der gefundenen Kurven. Die letzteren bilden mithin die Gesamtheit der kubischen Raumkurven auf der F_1^4, welche der Doppelgeraden einmal begegnen.

Diese Raumkurven 3. Ordnung auf der F_1^4, die sich auf die Doppelgerade in einem Punkte stützen, will ich sämtlich mit R^3 bezeichnen.

Wir haben also gefunden:

1) Auf einer Fläche 4. Ordnung mit einer doppelten Geraden gibt es 448 einzelne Raumkurven 3. Ordnung R^3, welche der Doppel-

geraden einmal begegnen. Jede von ihnen schneidet 10 Gerade $g^{(1)}$, welche 5 von den 8 Geradenpaaren der Fläche bilden, einmal und aus jedem der übrigen 3 Geradenpaare eine Gerade $g^{(2)}$ in 2 Punkten und die andere $g^{(0)}$ gar nicht und trifft aus jedem von 16 K-Paaren der Fläche einen Kegelschnitt gar nicht und den anderen dreimal und aus jedem der übrigen 48 Paare den einen in 2 und den anderen in 1 Punkte. Auf jeden der Kegelschnitte S stützen sie sich zweimal.

67. Zwei von diesen K^3 mögen nun $k \geqq 2$ ihrer $g^{(1)}$-Paare gemeinsam haben und i von den $g^{(2)}$. Dann gehören nur die Geraden aus k unter den 5 Paaren von $g^{(1)}$ der einen Kurve auch zu den $g^{(1)}$ der zweiten. Diejenigen aus $5-k$ der übrigen 3 Paare müssen also die anderen $g^{(1)}$ der letzteren bilden. Jedes dieser Paare enthält aber auch eine $g^{(2)}$ der ersten K^3. Unter den $g^{(1)}$ der zweiten Kurve gibt es folglich $5-k$ von den $g^{(2)}$ der anderen.

Jede von 2 Kurven K^3 mit k gemeinsamen $g^{(1)}$-Paaren und i gemeinsamen $g^{(2)}$ trifft also i von den $g^{(2)}$ der anderen zweimal und $5-k$ weitere einmal.

Die 6 Schnittpunkte einer unserer beiden Kurven mit der zur anderen gehörigen F^2 müssen als Punkte der auf der F_1^4 gelegenen schneidenden K^3 auch der Schnittkurve von F^2 und F_1^2 angehören, welche aus der zweiten K^3, deren $3g^{(2)}$ und der d besteht. Da aber die erste K^3 die d einmal und die $g^{(2)}$ in $2i+(5-k)$ Punkten trifft, so müssen die übrigen $k-2i$ Punkte auf der anderen K^3 liegen. Das sind die Begegnungspunkte der beiden kubischen Kurven. Wir sehen, dass ihre Anzahl allein von der Zahl der gemeinsamen $g^{(2)}$ und derjenigen der Paare gemeinsamer $g^{(1)}$ abhängt. Es gilt:

2) Haben 2 Raumkurven 3. Ordnung K^3 auf einer F_1^4 von den $g^{(2)}$ und k Paare von den $g^{(1)}$ gemeinsam, so treffen sie sich in $k-2i$ Punkten.

68. Wir fanden oben, dass eine R^3, welche mit einer anderen k $g^{(1)}$-Paare gemeinsam hat, $5-k$ von den $3\,g^{(2)}$ der letzteren einmal trifft. Sie kann daher höchstens $3-(5-k)=k-2$ derselben zweimal schneiden. Es ist also die Anzahl der gemeinsamen $g^{(2)}$ der beiden Kurven $i \leqq k-2$. Da ferner eine R^3 durch ihre $3g^{(2)}$ bestimmt ist, so kann i nicht grösser als 2 sein. Für i gelten also die beiden Ungleichungen $i \leqq 2$ und $i \leqq k-2$. Es kann mithin bei $k = 5$ oder $k = 4$ nur $i = 2$, 1 oder 0 sein, bei $k = 3$ nur $i = 1$ oder 0, bei $k = 2$ nur $i = 0$. Für alle diese 9 Fälle folgt die Anzahl der Schnittpunkte zweier R^3 aus Satz 2), und man erkennt so folgendes:

3) Eine jede der 448 kubischen Raumkurven R^3 auf der F_1^4 trifft

in 1, 3, 5 Punkten die 3, 3, 1 anderen, welche mit ihr die $5g^{(1)}$-Paare und beziehentlich 2, 1, 0 von den $g^{(2)}$ gemeinsam haben,

in 0, 2, 4 Punkten die 30, 60, 30 Kurven R^3, welche mit ihr in $4g^{(1)}$-Paaren und beziehentlich 2, 1, 0 von den $g^{(2)}$ übereinstimmen.

in 1, 3 Punkten diejenigen 120, 120 Kurven, welche 3 Paare ihrer $g^{(1)}$ gleichfalls einmal treffen und beziehentlich 1, 0 ihrer $g^{(2)}$ zweimal.

in 2 Punkten die übrigen 80, zu deren $g^{(1)}$ nur 3 Paare ihrer eigenen $g^{(1)}$ gehören.

69. Diese Ergebnisse bedürfen in so weit, als sie aus Satz 2) folgen, d. h. in so weit, als sie sich auf die Schnittpunktzahlen beziehen, keiner Begründung mehr. Dagegen will ich an einem Beispiel zeigen, wie man die Anzahlen der Kurven ermitteln kann, welche den einzelnen Gruppen angehören, und zwar will ich dies tun für die Kurven der 2. Gruppe, welche mit der gegebenen R^3 $4g^{(1)}$-Paare gemeinsam haben, weil Clebsch [1]) hierüber andere Angaben gemacht hat.

Eine R^3 ist durch 3 windschiefe Gerade der F_1^4 als $g^{(2)}$ der Kurve bestimmt. Es gibt also auch eine solche

1) Vgl. Math. Ann. Bd. I S. 278 vorletzter Absatz.

kubische Raumkurve auf der Fläche, welche die Geraden g_1, g_2, g_3 zu ihren $g^{(2)}$ hat. Die $g^{(1)}$ derselben sind dann g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g'_4, g'_5, g'_6, g'_7, g'_8. Eine andere R^3, welche mit dieser in $4g^{(1)}$-Paaren übereinstimmen soll, muss dann, wie wir oben erkannt haben, von den genannten $10g^{(1)}$ der letzteren ein und aus 2 der 3 übrigen Geradenpaare der Fläche je eine zweimal treffen. Dies wird bei $10 \cdot 3 \cdot 2^2 = 120$ Kurven der Fall sein.

Ich erhalte diese Kurven, wenn ich unter den dieselben bestimmenden $g^{(2)}$ wähle eine von den $10g^{(1)}$ der gegebenen Kurve und von deren $g^{(2)}$ entweder

1) zwei, etwa g_1, g_2, g_4, was ich bei $10 \cdot 3 = 30$ Kurven erreiche, oder

2) eine, und ausserdem eine von den Paarengenossinnen der beiden übrigen, also etwa g_1, g'_2, g_4, was sich in $10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$ Fällen ermöglichen lässt, oder

3) keine, dagegen 2 von den Genossinnen derselben, wie z. B. g'_1, g'_2, g_4, und dies kann ich auf $10 \cdot 3 = 30$ verschiedene Weisen bewirken.

Für diese 3 Kathegorien sind nun vermutlich infolge eines Druckfehlers bei Clebsch nicht die Zahlen 30, 60, 30, sondern 60, 30, 30 angegeben.

Durch Zusammenstellung der Resultate des Satz 3) erhalten wir dann:

4) Jede der 448 kubischen Raumkurven R auf der F_1^4 trifft 1, 30, 123, 140, 123, 30 der übrigen 447 in beziehentlich 5, 4, 3, 2, 1, 0 Punkten.

Hieraus folgt ferner:

5) Es gibt auf der F_1^4

$$224\left[= \frac{448}{2}\right],\ 6720\left[= \frac{448 \cdot 30}{2}\right],$$

$$27552\left[= \frac{448 \cdot 123}{2}\right],\ 31360\left[= \frac{448 \cdot 140}{2}\right],$$

27552, 6720 R^3-Dupel mit beziehentlich 5, 4, 3, 2, 1, 0 Begegnungspunkten.

70. Wir haben erkannt, dass jede R^3 auf der F_1^4 eine und nur eine andere in 5 Punkten trifft. Wie die Geraden

und Kegelschnitte der Fläche, so treten also auch die kubischen Raumkurven R^3 auf der F_1^4 paarweise auf.

Die 224 R^3-Dupel mit 5 Begegnungspunkten will ich daher R^3-Paare nennen. Zwei R^3 bilden ein Paar, wenn sie dieselben $5\,g^{(1)}$-Paare haben und ihre g^2 die übrigen 3 Geradenpaare bilden.

Jedes R^3-Paar bestimmt nun eine Fläche 2. Ordnung, nämlich diejenige, welche sich durch die 5 Schnittpunkte des Paares legen lässt und je 2 weitere Punkte der beiden Paare.

6) Die 448 kubischen Raumkurven R^3 einer F_1^4 liegen also paarweise in 224 Flächen 2. Ordnung.

71. Zwei kubische Raumkurven auf einer und derselben Fläche 2. Ordnung schneiden sich bekanntlich nur dann in 5 Punkten, wenn sie aus verschiedenen Systemen kubischer Raumkurven auf der F^2 stammen, d. h. wenn die Geraden einer und derselben Geradenschaar der Fläche die eine der beiden Kurven zweimal und die andere einmal treffen. Auf der Fläche 2. Ordnung F^2 eines R^3-Paares kann die Doppelgerade d der F_1^4 also nicht liegen, da sie jede der beiden R^3 nur einmal trifft. Aus demselben Grunde kann auch keine der einfachen Geraden g der F_1^4 auf der F^2 liegen, denn von ihnen treffen die 6 Geraden, welche die $g^{(2)}$ der beiden R^3 bilden, die eine von diesen Kurven zweimal und die andere gar nicht, und die übrigen 10 Geraden nur einmal. Demnach kann die Kurve 2. Ordnung, welche das R^3-Paar zur vollen Schnittkurve 8. Ordnung zwischen F^2 und F_1^4 ergänzt, nur in einem Kegelschnitt S bestehen. Ein Kegelschnitt K kann es deshalb nicht sein, weil diese Ergänzungsschnittkurven der aus dem R^3-Paare bestehenden Kurve 6. Ordnung zweimal auf der Doppelgeraden d begegnen muss, da die volle Schnittkurve von F^2 und F_1^4 Doppelpunkte auf d haben muss, nämlich die, in denen die d die F^2 durchdringt.

Die Begegnungspunkte zweier gepaarter Raumkurven R^3 mit der k sind hiernach immer die Schnittpunkte der

letzteren mit einem der Kegelschnitte S. Auf diese Weise werden 224 Kegelschnitte S ausgezeichnet.

Von den 6 Schnittpunkten einer anderen R^3 mit der F^2 des R^3-Paares liegen nur 2 auf diesem Kegelschnitt S, da jene R^3 dem aus d und S bestehenden ebenen Schnitt von F_1^4 nur einmal auf d und daher noch zweimal auf S begegnen muss. Die übrigen 4 Punkte sind also Punkte des Kurvenpaares und wir können daher sagen:

7) Jede R^3 begegnet einem R^3-Paar in 4 Punkten. Stützt sie sich auf eine Kurve des Paares in i Punkten, so trifft sie die andere in $4-i$ Punkten.

Daher gilt auch:

8) Zwei R^3-Paare begegnen sich in insgesamt 8 Punkten.

Für die kubischen Raumkurven R^3 der F_1^4 lassen sich so ganz analoge Eigenschaften ableiten, wie für die Kegelschnitte. Ich will mich aber darauf beschränken, nur noch zu erwähnen, dass aus Satz 7) folgt:

9) Begegnen 2 R^3 einander in α Punkten, so tun es auch ihre Paargenossinnen.

Schliesslich will ich noch darauf hinweisen, dass die Treffgeraden von 2 Kegelschnitten eines K-Paares sich zu 8 Geradenpaaren ergänzen und die $g^{(2)}$ der Kurven eines R^3-Paares 3 Geradenpaare bilden.

§ 9.

Die auf einer Fläche vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden gelegenen 128 Büschel von kubischen Raumkurven Q^3.

72. Auf der F_1^4 gibt es ausser den besprochenen 448 kubischen Raumkurven R^3, die der Doppelgeraden einmal begegnen, nach ∞^1 Raumkurven 3. Ordnung, welche ihr zweimal begegnen. Man kann sie in folgender Weise ermitteln:

Ein Kegelschnitt K_1 auf der F_1^4, ihre Doppelgerade d und eine einfache Gerade g_1 der Fläche, welche sich auf

K_1 stützt, bilden eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, durch welche sich ein Büschel von Flächen 2. Ordnung legen lässt. Jede Fläche desselben durchdringt die F_1^4 ausser in den eine Schnittkurve 5. Ordnung darstellenden Linien d, K_1, g_1 noch in einer Raumkurve 3. Ordnung. Die so erhaltene einfach unendliche Mannigfaltigkeit von kubischen Raumkurven bildet ein Kurvenbüschel, indem durch jeden Punkt der Fläche eine solche Kurve geht.

Jede Kurve aus diesem Büschel trifft die d in 2 Punkten. Eine beliebige durch die d gelegte Ebene durchdringt nämlich die Fläche zweiter Ordnung F^2, durch welche eine solche Kurve eingeschnitten wird, noch in einer Geraden l. Diese stösst in die F_1^4 4 Punkte ein, welche auf der aus d, K_1, g_1 und der kubischen Kurve bestehenden Gesamtschnittkurve von F^2 und F_1^4 liegen müssen. Unter ihnen zählt der Begegnungspunkt von d und l doppelt und der Schnittpunkt von K_1 und l einfach. Der 4. Schnittpunkt kann dann, da g_1 zu l windschief ist, nur ein Punkt der Raumkurve 3. Ordnung sein. Diese trifft also den aus d und l bestehenden ebenen Schnitt der F^2 nur einmal auf l und daher noch zweimal auf d.

Jeder der Kegelschnitte S begegnet unserer Kurve einmal, denn von ihren 3 Schnittpunkten mit einer durch die d gelegten Ebene liegen 2 auf d und daher einer auf S.

Aus diesem Grunde treffen die gefundenen Kurven aus jedem Geradenpaare der F_1^4 eine Gerade, und zwar schneiden sie die Gerade g_1, weil diese derselben Geradenschaar auf der zu der betreffenden Raumkurve gehörigen Fläche 2. Ordnung angehört, wie die erwähnte Gerade l, und stützen sich auf die 7 zu K_1 windschiefen Geraden aus den anderen 7 g-Paaren, da von den 2 Schnittpunkten einer jeden dieser Geraden mit der Fläche 2. Ordnung, keine auf K_1 und nur einer auf d liegt.

Die 8 Geraden g, welche unsere Kurven treffen, will ich die $g^{(1)}$ derselben nennen und die anderen 8 mit $g^{(0)}$ bezeichnen.

73. Auf K_1 stützen sich die gefundenen Kurven dreimal,

denn jede von ihnen muss einem ebenen Schnitt der zu ihr gehörigen Fläche 2. Ordnung in 3 Punkten begegnen.

Nun trifft von den 8 $g^{(1)}$ unserer Kurve nur eine den Kegelschnitt K_1. Diese 8 Geraden bilden also ein Nebenoktupel. Es gibt aber noch 7 andere Kegelschnitte K, welche gleichfalls zu je 7 Geraden dieses Nebenoktupels windschief sind. Sie treffen g_1 nicht und bilden mit K_1 ein Oktupel windschiefer Kegelschnitte. Auch diese 7 Kegelschnitte haben mit den Raumkurven je 3 Punkte gemeinsam, denn von den 4 Schnittpunkten eines jeden dieser Kegelschnitte mit der durch g_1, K_1, d und eine solche Kurve gehenden Fläche 2. Ordnung liegt keine auf g_1 oder K_1 und nur einer auf d und daher 3 auf der Raumkurve.

Die gefundenen Kurven stützen sich demnach auf die 8 Kegelschnitte K, welche je eine ihrer $g^{(1)}$ treffen. Auf deren Ebenengenossinen, welche je 7 von den $g^{(1)}$ begegnen, aber gar nicht, da sich die Anzahlen ihrer Schnittpunkte mit den Kurven eines K-Paares zu der Zahl 3 ihrer Punkte ergänzen müssen, welche in die Ebene des Paares fallen. Aus diesem Grunde schneiden dann die Kurven aus jedem der übrigen 56 K-Paare einen Kegelschnitt einmal und einen zweimal, und zwar begegnen sie einmal denjenigen $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ Kegelschnitten, welche sich auf je 5 ihrer $g^{(1)}$ stützen, und zweimal den 56 Genossen derselben, welche je 3 von den $g^{(1)}$ treffen. Sind nämlich g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8 die Treffgeraden von K_1, so bilden g_1, g_2', g_3', g_4', g_5', g_6', g_7', g_8' die $g^{(1)}$ der Raumkurven. Trifft dann ein Kegelschnitt K 5 von diesen letzteren, so stützt er sich entweder auf g_1 und 4 von den 7 zu K_1 windschiefer Geraden (etwa g_2', g_3', g_4', g_5') oder er trifft g_1 nicht, aber 5 von diesen Geraden (etwa g_2', g_3', g_4', g_5', g_6'). Im ersteren Falle hat er mit g_1 einen Punkt und mit K_1 4 Treffgerade und daher auch einen Punkt gemeinsam, im zweiten Falle aber mit g_1 keinen Punkt, mit K_1 jedoch nur 2 Treffgerade und deshalb 2 Punkte. In jedem Falle jedoch liegen 2 von den 4 Schnittpunkten des Kegelschnittes mit der zu einer der Raumkurven gehörigen Fläche 2. Ordnung 2 Punkte

auf g_1 und K_1, einer auf d und der 4. auf dieser Raumkurve selbst.

74. Eine Kurve C^3 aus dem gefundenen Büschel liegt aber nicht nur mit K_1 und g_1, sondern auch mit jedem anderen der 8 Kegelschnitte, welche ihr dreimal begegnen, und einer ihrer übrigen $7g^{(1)}$ auf einer Fläche 2. Ordnung. Jede der $8g^{(1)}$ nämlich bildet mit der C^3 eine Raumkurve 4. Ordnung 2. Art. Die durch sie bestimmte Fläche 2. Ordnung geht noch ausserdem durch die d, weil sie von ihr schon deren 3 Schnittpunkte mit der $g^{(1)}$ und der C^3 trägt, und durch denjenigen der genannten Kegelschnitte, der sich auf die $g^{(1)}$ stützt, da sie mit demselben bereits 5 Punkte gemeinsam hat, nämlich dessen $3+1+1=5$ Begegnungspunkte mit C^3, d und der g^1. Ein anderer Kegelschnitt K dagegen kann mit der C^3 nicht durch eine Fläche 2. Ordnung verbunden sein, da die C^3 einen solchen dann als einen ebenen Schnitt dieser Fläche in 3 Punkten treffen muss.

Das gefundene Kurvenbüschel kann also dargestellt werden als das Schnittkurvenbüschel der F_1^4 mit jedem der 8 Büschel von Flächen 2. Ordnung, welche durch d, irgend eine von den $8g^{(1)}$ des Kurvenbüschels und denjenigen Kegelschnitt K geht, der sich auf diese Gerade stützt und die Kurven in 3 Punkten schneidet.

Von den $128 \cdot 8$ Kurvenbüscheln, zu denen ich gelange, wenn ich durch die d einen der 128 Kegelschnitte und eine der 8 Treffgeraden des letzteren ein Flächenbüschel 2. Ordnung lege und dasselbe mit der F_4^1 zum Schnitt bringe, sind also immer 8 identisch und ich erhalte nur 128 verschiedene Büschel von Kurven 3. Ordnung der beschriebenen Art.

Auf diesem Wege komme ich aber auch zu den sämtlichen kubischen Raumkurven der F_1^4, die sich auf die d zweimal stützen. Ist nämlich C^3 eine beliebige solche Kurve auf der Fläche, so trifft sie aus jedem der 8 Geradenpaare der F_1^4 eine Gerade einmal, denn von ihren 3 Punkten, die in die Ebene eines Geradenpaares fallen, liegen 2 auf d und daher eine auf einer der beiden Ge-

raden des Paares. Jede der ermittelten 8 Geraden $g^{(1)}$, welche die Q^3 einmal trifft, ergänzt nun diese Kurve zu einer Raumkurve 4. Ordnung 2. Art und bestimmt so eine Fläche 2. Ordnung F^2, welche auch durch die d geht. Die Geraden auf dieser F^2, welche mit der d derselben Geradenschar angehören, begegnen der Q^3 zweimal, da die d dies tut, die Geraden der anderen Schar aber, welche die d treffen, nur einmal. Diese letzteren sind zu der $g^{(1)}$ windschief, und von den 4 Schnittpunkten einer solchen mit der F_1^4 liegen also einer auf Q^3, 2 auf d und keiner auf der $g^{(1)}$, sodass der 4. ein Punkt der Kurve 2. Ordnung sein muss, welche die eine Schnittkurve 6. Ordnung bildenden Linien d, Q^3, $g^{(1)}$ zur vollen Schnittkurve 8. Ordnung von F^2 und F_1^4 ergänzt. Diese Kurve 2. Ordnung muss deshalb auch die $g^{(1)}$ einmal treffen und kann, da sie auch von den anderen Geraden zweimal getroffen wird, nur ein Kegelschnitt K sein, welcher sich auf die $g^{(1)}$ stützt. Die F^2 gehört somit einem der obigen Flächenbüschel an, als deren Schnittkurvenbüschel mit der F_1^4 sich die gefundenen 128 Kurvenbüschel 3. Ordnung ergeben, und unsere Q^3 stammt also auch aus einem dieser Kurvenbüschel.

1) Auf einer Fläche 4. Ordnung mit einer doppelten Geraden gibt es 128 Büschel von Raumkurven 3. Ordnung. Q^3, welche die Doppelgerade in 2 Punkten und aus jedem der 8 Geradenpaare der Fläche eine Gerade $g^{(1)}$ einmal und die anderen gar nicht treffen. Jedes dieser Büschel begegnet den 8 Kegelschnitten K, die sich auf je eine ihrer 8 $g^{(1)}$ stützen, dreimal, deren Genossen, die je 7 von diesen Geraden treffen, gar nicht, aus jedem der 56 übrigen K-Paaren dem einen Kegelschnitt, der 3 von den $g^{(1)}$ schneidet, zweimal und dem anderen, der 5 von diesen trifft, einmal. Die Kurven stützen sich auf jeden der Kegelschnitte S einmal.

75. Jede der 448 kubischen Raumkurven R^3 auf der

F_1^4 bildet mit ihren 3 $g^{(1)}$ und der Doppelgeraden d den vollen Schnitt dieser Fläche mit einer Fläche 2. Ordnung F^2. Auf dieser Gesamtschnittkurve müssen auch die 6 Punkte liegen, welche eine unserer Q^3 mit der F^2 gemeinsam hat. Stützt sich nun die Q^3 auf i von den $g^{(2)}$ der R^3, so gehören 2 von diesen 6 Punkten der d und i den 3 $g^{(2)}$ an. Die übrigen $4-i$ sind dann Punkte der R^3.

Eine R^3 und eine Q^3 der F_1^4 begegnen also einander in $4-i$ Punkten, wenn i von den $g^{(2)}$ der ersteren zu den $g^{(1)}$ der letzteren gehören. Hieraus schliessen wir:

2) Eine Q^3 und R^3 einer F_1^4 begegnen einander in 1, 2, 3 oder 4 Punkten, je nachdem sich in 3, 2, 1 oder 0 Geraden g der Fläche eine $g^{(1)}$ der Q^3 mit einer $g^{(2)}$ der R^3 vereinigt. Dies trifft bei einem jeden Q^3 Büschel für beziehentlich $56\left(\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\right)$ 168 $\left(8\cdot\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\right)$ 168, 56 R^3 ein, und bei jeder R^3 für beziehentlich 16 $(=2^{7-3})$, 48 $(=3\cdot 2^{7-3})$, 48, 16 Q^3 Büschel.

76. Ferner ist leicht zu erkennen, dass die gemeinsamen $g^{(1)}$ zweier Kurven aus den Q^3 = Büscheln identisch sind mit den Geraden des Raumes, welche diese beiden Kurven, die d und einen beliebigen ebenen Schnitt der F_1^4 in 4 getrennten Punkten treffen. Die Anzahl dieser letzteren Geraden ist aber $8-2\alpha$, wie unsere für Anzahl der Treffgerade von 4 Raumkurven abgeleitete Formel II lehrt, wenn man $m_1 = m_2 = 3$, $m_3 = 4$, $\sigma_{12} = \alpha$, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$ setzt. In der Tat können ja auch mit 8, 6, 4, 2 oder 0 Gerade der Fläche gemeinsame $g^{(1)}$ zweier Q^3 sein, denn die g^1 einer solchen Kurve bilden ein Nebenoktupel, und 2 Nebenoktupel können, wie wir oben fanden, nur eine gerade Anzahl von Geraden gemeinsam haben.

Dann ist aber auch umgekehrt klar, dass zwei Q^3 einer F_1^4 einander in 0, 1, 2, 3 oder 4 Punkten begegnen, je nachdem sie 8, 6, 4, 2 oder 0 $g^{(2)}$ gemeinsam haben.

Nun stützen sich aber auf 8, 6, 4, 2, 0 von den Geraden des Nebenoktupels der $g^{(1)}$ einer Q^3 beziehentlich

1, 28 $\left(= \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}\right)$, 70 $\left(= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right)$ 28, 1 Q^3-Büschel. Daraus folgt:

3) Eine kubische Raumkurve Q^3 auf einer F_1^4 trifft in 0, 1, 2, 3, 4 Punkten die Kurven aus beziehentlich 1, 28, 70, 28, 1 Q^3-Büscheln, nämlich die, welche mit ihr beziehenlich 8, 6, 4, 2, 0 ihrer $g^{(1)}$ gemeinsam haben. Hierbei ist das eine Büschel, welches zu der gegebenen Q^3 windschief ist dasjenige, welchen diese selbst angehört.

77. Wir ersehen hieraus, dass jedem Q^3-Büschel ein anderes zugeordnet ist, dessen Kurven denen des gegebenen viermal begegnet. Durch jede Kurve Q_1^3 aus einem von 2 so zugeordneten Büscheln geht dann aber immer eine Fläche aus dem Büschel von Flächen 2. Ordnung, dessen Grundkurve aus der d und einer Kurve Q_2^3 des anderen Büschels besteht, denn eine Fläche des Büschels (Q_1^3, d) trägt von der Q_2^3 bereits 6 Punkte, nämlich die 2 Punkte, in denen sich die Q_1^3 auf die d stützt und die 4 Begegnungspunkte von Q_1^3 und Q_2^3. Daher gibt es eine Fläche im Büschel, welche noch einen 7. Punkt der Q^3 trägt und deshalb die letztere ganz in sich aufnimmt.

4) Die 128 Büschel kubischer Raumkurven Q^3 auf einer F_1^4 verteilen sich auf 64 Büschelpaare, deren Kurven einander viermal treffen. In einem solchen Paare ist jede Kurve des einen Büschels mit jeder aus dem anderen durch eine Fläche 2. Ordnung verbunden.

78. Wir hatten ferner gefunden, dass das Büschel von Flächen 2. Ordnung, welche durch die d, einen Kegelschnitt K_1 und eine Treffgerade g_1 desselben gehen, eins der 128 Q^3-Büschel in die F_1^4 einschneidet. Ein anderer Kegelschnitt K der F_1^4 nun, welcher zu den Büschelkurven windschief ist, begegnet der Grundkurve des Flächenbüschels in 4 Punkten, denn seine 4 Schnittpunkte mit einer Fläche F^2 dieses Büschels müssen, da sie auf der

Q^3, welche die F^2 in die F_1^4 einschneidet, nicht liegen können, Punkte der Grundkurve sein. Aus demselben Grunde stützt sich jede g^1 des Kurvenbüschels auf die Grundkurve in 2 Punkten. Dann geht aber durch jeden der 8 zu den Büschelkurven windschiefen Kegelschnitte K und jede der $8g^0$ eine Fläche des Büschels, denn eine solche braucht von einem der genannten Kegelschnitte nur noch einen 5. Punkt zu tragen, und von einer $g^{(0)}$ nur noch einen 3. Punkt in sich aufzunehmen, um beziehentlich durch jenen Kegelschnitt oder diese Gerade ganz hindurchzugehen. Nun stützt sich aber auf jeden unserer 8 Kegelschnitte eine $g^{(0)}$, denn jeder von ihnen trifft nur 7 von den $g^{(1)}$. Demnach liegt auf der Fläche des Büschels, welche einen jener Kegelschnitte trägt, auch noch diejenige $g^{(0)}$, welche diesen Kegelschnitt trifft. Aus obigem hat sich somit ergeben:

5) Jedes Büschel kubischer Raumkurven Q^3 auf einer F_1^4 enthält 8 zerfallene Kurven. Sie bestehen aus je einem der 8 Kegelschnitte K, welche zu den Büschelkurven windschief sind, und aus derjenigen $g^{(0)}$ des Q^3-Büschels, welche sich auf diesen Kegelschnitt stützt.

§ 10.

Die Raumkurven 4. Ordnung auf der Fläche.

79. Auf einer F_1^4 findet man 3 verschiedene Sorten von biquadratischen Raumkurven, nämlich:

1) Auf einer F_1^4 gibt es 112 Netze von Raumkurven 4. Ordnung 1. Art R_1^4, d. h. 112 Systeme von je ∞^2 solcher Kurven, welche durch einen Punkt der Fläche ein Kurvenbüschel schicken und durch 2 Punkte der Fläche eine Kurve. Sie stützen sich auf die doppelte und 2 einfache Gerade zweimal, auf die Genossinnen der letzteren gar nicht und auf die übrigen Geraden g der F_1^4 einmal.

Die $2^2 \cdot \frac{8 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 112$ Netze von Flächen 2. Ordnung nämlich, welche sich durch die Doppelgerade und 2 windschiefe einfache Gerade g der Fläche legen lassen, schneiden diese noch in einer Kurve 4. Ordnung. Die zu d windschiefen Geraden der quadratischen Fläche treffen diese Kurven zweimal, da sie der d und den beiden Geraden g nur insgesamt zweimal begegnen. Mithin sind die obigen Restschnittkurven biquadratische Raumkurven 1. Art, welche d und die beiden g zweimal treffen.

Ferner erkennt man sofort:

2) Die R_1^4 haben mit einem Kegelschnitt S 2 Punkte gemeinsam und mit einem Kegelschnitt K 3, 2 oder 1 Punkt, je nachdem dieser 0, 1[1]) oder 2 von den Doppelsekanten der R_1^4 trifft und dies tun beziehentlich 32, 64, 32 Kegelschnitte K.

Die Anzahl der Schnittpunkte von 2 solchen Kurven R_1^4 kann man in derselben Weise bestimmen, wie bei den kubischen Raumkurven. Es ergibt sich dabei:

3) Zwei Kurven R_1^4 auf der F_1^4 treffen sich in $6-2i-k$ Punkten, wenn sich die eine von ihnen auf i von den Doppelsekanten und k von den einfachen Sekanten der anderen doppelt stützt. Daher schneidet eine R_1^4 die Kurve gleicher Art aus 1, 24, 62, 24, 1 Netzen in 6, 5, 4, 3, 2 Punkten.

80. Ferner ergibt sich:

4) Auf einer F_1^4 befinden sich 128 Netze von Kurven 4. Ordnung 2. Art R_2^4, welche sich auf die Doppelgerade dreimal, auf einen Kegelschnitt K viermal und auf die diesen nicht[2]) schneidenden 8 Geraden einmal.

---

1) Die diesem widersprechende Angabe bei Sturm, Math. Ann. Bd. 4 Seite 264 Nr. 20, 3 beruht auf einem Druckfehler.

2) Bei Sturm, Math. Ann. Bd. 4, Seite 264 Nr. 20, 4 ist der Druckfehler zu verbessern.

Man erhält sie als Restschnittkurven 4. Ordnung der 128 Netze von Flächen 2. Ordnung, welche durch die Doppelgerade und einen Kegelschnitt K der F_1^4 gehen. Die zu der d windschiefen Geraden auf einer solchen quadratischen Fläche treffen den K einmal und durchdringen also die F_1^4 noch dreimal auf der obigen Restkurve. Diese ist daher eine Kurve 4. Ordnung 2. Art, welche sich auf die d dreimal und mithin auf je eine Gerade aus einem g-Paar, sowie einen Kegelschnitt S einmal stützt.

Ferner ist leicht zu erkennen:

5) Eine R_2^4 hat mit einem Kegelschnitt K 4 Punkte gemeinsam, mit jedem anderen, aber der jenen in α Punkten trifft, $3-\alpha$, und stützt sich also auf 1, 28, 70, 28, 1 Kegelschnitte K der Fläche in beziehentlich 0, 1, 2, 3, 4 Punkten.

Ausserdem findet man in der schon vielfach beschriebenen Weise:

6) Zwei Kurven R_2^4 begegnen einander in $2+\alpha$ Punkten, wenn die zugehörigen Kegelschnitte K, die sie viermal treffen, α Punkte gemeinsam haben. Folglich trifft eine R_2^4 die Kurven gleicher Art aus 1, 28, 70, 28, 1 Netzen in beziehentlich 1, 2, 3, 4, 5 Punkten.

81. Schliesslich finden wir:

7) Auf der F_1^4 gibt es 4480 Raumkurven 4. Ordnung 2. Art. Q_2^4, welche sich auf die Doppelgerade d zweimal stützen, auf eine einfache Gerade einmal in deren Begegnungspunkte mit d und ausserdem noch zweimal; dessen Genossin gar nicht, 3 anderen Geraden g zweimal und deren Genossinnen keinmal und den übrigen 8 in je einem Punkte.

Sie lassen sich ermitteln als Restschnittkurven der $448 \cdot 10$ quadratischen Flächen, welche durch eine der 448 kubischen Raumkurven R^3 und eine von ihren 10 einfacher Sekanten $g^{(1)}$ gehen. Jede zu der $g^{(1)}$ windschiefe Gerade auf der F^2 schneidet die F_1^4 auf R^3 nur einmal, also noch dreimal auf der Restkurve. Diese ist also eine Raum-

kurve 4. Ordnung 2. Art Q_2^4, welche die $g^{(1)}$ der R^3 in 3 Punkten trifft. Die aus R^3, Q_2^4 mit der $g^{(2)}$ bestehende volle Schnittkurve von F^2 und F_1^4 muss auf der d 2 Doppelpunkte haben, da die d die F^2 in 2 Punkten durchdringt. Die Q_2^4 muss sich also auf die d in den Punkten stützen, in welcher $g^{(1)}$ und R^3 die d treffen, d. h. die Q_2^4 begegnet der d zweimal und zwar einmal auf $g^{(1)}$.

Auch hier sind die Schnittpunkte dieser Kurven mit anderen Kurven auf der Fläche in der alten Weise zu bestimmen. Man findet z. B.

8) Eine Q_2^4 hat mit einem Kegelschnitt S der Fläche 2 Punkte gemeinsam und mit 8, 32, 48, 32, 8 Kegelschnitten K beziehentlich 0, 1, 2, 3, 4 Punkte.

§ 11.

Die Erzeugung der Fläche vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden durch die Schnittkurven entsprechender Flächen aus zwei projektiven Flächenbüscheln zweiter Ordnung.

82. Wie sich in § 9 ergeben hat, ist jedem Q^3-Büschel der F_1^4 ein anderes in der Weise zugeordnet, dass jede Kurve aus einem der beiden Büschel mit jeder der anderen auf einer Fläche 2. Ordnung liegt, welche auch die d trägt. Die Flächenbüschel 2. Ordnung, welche durch die d und 2 beliebige Kurven aus einem und demselben Q^3-Büschel gehen, schneiden daher beide in die F_1^4 dasselbe Q^3-Büschel ein, welches jenem in der beschriebenen Weise zugeordnet ist. Durch jeden Punkt einer $g^{(0)}$ jener beiden Kurven geht dann aus jedem der beiden Flächenbüschel eine Fläche und aus dem von ihnen eingeschnittenen Kurvenbüschel eine Kurve. Die Flächen der beiden Büschel, welche durch einen und denselben Punkt der $g^{(0)}$ gehen, schneiden sich mithin in der d und derjenigen Kurve aus dem Q^3-Büschel, welche durch denselben Punkt geht. Stelle ich demnach zwischen 2 solchen Flächenbüscheln eine Projektivität in der Weise her, dass 2 Flächen ein-

ander entsprechen, wenn sie eine $q^{(3)}$ der beiden zu den Grundkurven der Büschel gehörigen Q^3 in demselben Punkte durchdringen, so bilden die Schnittkurven zugeordneter Flächen ein Q^3-Büschel der F^4 und erfüllen so diese Fläche ganz, da durch jeden Punkt derselben aus jedem Q^3-Büschel eine Kurve geht. Wir können somit sagen:

1) Jede Fläche vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden lässt sich erzeugen durch die Schnittkurven entsprechender Flächen aus zwei zu einander projektiven Flächenbüscheln 2. Ordnung, welche die Doppelgerade zur gemeinsamen Geraden haben, und deren Grundkurven durch 2 kubische Raumkurven Q_1^3, Q_2^3 aus einem und demselben Büschel (also ohne Begegnungspunkte) vervollständigt werden. Hierbei bilden die erzeugenden Kurven das Q^3-Büschel, welches dem Büschel, zu dem Q_1^3 und Q_2^3 gehören, gepaart ist.

83. Umgekehrt kann man aber auch leicht den folgenden Satz beweisen:

2) Die Schnittkurven entsprechender Flächen aus zwei zu einander projektiven Flächenbüscheln zweiter Ordnung, deren Grundkurven eine gemeinsame Gerade d enthalten, erfüllen eine Fläche vierter Ordnung, welche durch die Grundkurven der beiden Büschel geht und deren gemeinsame Gerade zur Doppelgerade hat.

In einer beliebigen Ebene des Raumes nämlich erhalten wir als Erzeugnis der Schnittkurven entsprechender Flächen von zwei solchen Flächenbüscheln eine Kurve 4. Ordnung, welche den Spurpunkt der gemeinsamen Gerade d zum Doppelpunkt hat, denn die beiden Flächenbüschel schneiden 2 projektive Kegelschnittbüschel in die Ebene ein, welche den Schnittpunkt von dieser mit der d zum gemeinsamen Grundpunkt haben, und daher durch die Schnittpunkte entsprechender Kegelschnitte eine Kurve

4. Ordnung erfüllen, welche den gemeinsamen Grundpunkt zum Doppelpunkt haben.

Das Zustandekommen der Kegelschnitte S auf dieser Fläche ist bei unserer Erzeugung auch in folgender Weise leicht zu erkennen:

Die Grundkurven der erzeugenden Flächenbüschel bestehen aus der d und noch je einer Raumkurve 3. Ordnung, welche die d zweimal trifft und deshalb eine durch die d gelegte Ebene ε ausserhalb von d noch einmal durchdringt. In diese Ebene ε schneiden die beiden Flächenbüschel ausser der d nur noch 2 zu einander projektive Strahlenbüschel ein, welche diese 3. Schnittpunkte der Grundkurven zu Scheiteln haben, und mit den Schnittpunkten entsprechender Geraden also einen Kegelschnitt erfüllen.

Ein Geradenpaar aber entsteht in der Ebene ε, wenn die Projektivität in eine Perspektivität übergeht, d. h. wenn der gemeinsame Strahl der beiden Büschel in der Projektivität sich selbst zugeordnet ist, d. h. wenn 2 sich entsprechende Flächen in den Flächenbüscheln in die ε dieselbe Gerade einschneiden. Wir erhalten also so oft ein Geradenpaar als Erzeugnis, als es Paare zugeordneter Flächen gibt, welche eine Treffgerade von d gemeinsam haben. Sind Q_1^3 und Q_2^3 die beiden kubischen Kurven, welche zu den Grundkurven der Flächenbüschel gehören, so muss eine solche gemeinsame Gerade ausser d auch diese beiden Kurven ausserhalb von d treffen. Nun hat aber eine Fläche aus einem der beiden Büschel immer mit 4 Flächen des anderen eine Treffgerade von d gemeinsam, denn eine Fläche F^2 z. B. aus dem Flächenbüschel (Q_1^3, d) wird von Q_2^3 ausserhalb von d in 4 Punkten getroffen, und diese 4 Punkte senden Gerade der F^2 aus, welche auch die Q_2^3 treffen, und durch welche je eine Fläche des anderen Büschels geht. Wir bekommen demnach so oft ein Geradenpaar in den durch die d gehenden Ebenen als 2 solche Flächen mit einer gemeinsamen sich auf die d stützenden Geraden, einander auch in der Projektivität entsprechen. Dies kommt aber genau achtmal

vor, denn jede Fläche des einen Büschels hat mit 4 Flächen im anderen eine solche Gerade gemeinsam. Diesen entsprechen nach der Projektivität 4 Flächen im ersten Büschel. Umgekehrt ist jeder von den letzteren eine Fläche im 2. Büschel zugeordnet, welche wieder mit 4 Flächen des ersten Büschels eine Treffgerade von d gemeinsam hat. Die so hervorgerufene Korrespondenz [4. 4] zwischen den Flächen des ersten Büschels hat 8 Koinzidenzen. Es gibt daher in jedem der beiden Büschel 8 Flächen, welche mit den ihnen entsprechenden im anderen je eine Gerade gemeinsam haben, die sich auf die d stützt. Demnach zerfällt in 8 Ebenen des Büschels um die d der Kegelschnitt S in ein Geradenpaar, und wir erhalten so die 16 Geraden der Fläche F_1^4.

§ 12.

Eindeutige Abbildungen der Fläche auf eine Ebene.

84. Eine eindeutige Abbildung der F_1^4 auf eine Ebene erhalte ich auf folgende, mir von Herrn Professor Sturm mitgeteilte, Weise: Durch einen Punkt des Raumes geht in der Regel eine Gerade p, welche die Doppelgerade d und einen Kegelschnitt K_1 der Fläche in getrennten Punkten trifft. Den durch einen Punkt P der Fläche gehenden Strahl p schneide ich mit einer Ebene ε. Dieser Schnitt ist das Bild von P. Umgekehrt geht auch durch einen Punkt von ε eine solche Gerade p, welche die Fläche ausser auf d und K noch in einem 4. Punkt durchdringt.

So entsteht eine eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Fläche und denen der Bildebene.

Indessen wird diese Ein-eindeutigkeit teilweise unterbrochen. Dies tritt zunächst dann ein, wenn die Gerade p ganz in die Fläche oder ganz in die Bildebene fällt. So werden die 8 Geraden g der Fläche, welche sich auf K_1 stützen, durch Punkte dargestellt, nämlich durch ihre Spurpunkte P_1, P_2, P_3, P_4,

P_5, P_6, P_7, P_8 in der Bildebene; und die 4. Schnittpunkte R_1, R_2 der F_1^4 mit den Geraden DQ_1, DQ_2, welche den Spurpunkt D von d mit den Punkten Q_1, Q_2 verbinden, in denen K_1 die Bildebene durchdringt, bilden sich ab in Gerade, nämlich in diese Geraden DQ_1 und DQ_2. Ferner hört die Eindeutigkeit der Abbildung auf für die Punkte von d. Ist P nämlich ein Punkt von d, so muss er der 4. Schnittpunkt eines Projektionsstrahls p sein, welcher d und K getrennt trifft, d. h. p muss in P berühren. Man erhält in jeder der beiden in P berührenden Tangentialebenen eine solche Gerade, nämlich die, welche P mit dem ausserhalb von d gelegenen Spurpunkt von K_1 verbindet.

Einem Punkte der Doppelgeraden entsprechen also 2 in der Regel verschiedene Punkte in der Bildebene.

Diese Paare von Bildpunkten der Punkte von d erfüllen eine Kurve 5. Ordnung.

Die beiden Strahlen nämlich, welche die Bildpunkte eines Punktes P auf d liefern, stossen auf K_1 in 2 in der Regel getrennten Punkten P'. Umgekehrt gehen von einem Punkte P' auf K_1 2 Gerade aus, welche die F_1^4 auf d berühren. Also entsteht zwischen den Punkten auf d und K eine Korrespondenz $[2, 2]$, in welcher der Begegnungspunkt von d und K_1 sich selbst entspricht, weil eine von den Tangentialebenen dieses Punktes K_1 berührt. Habe ich nun ein beliebiges Ebenenbüschel, so entsprechen dem Schnittpunkt P einer Ebene ε dieses Büschels mit der d nach der obigen Korrespondenz 2 Punkte P' auf K_1 und durch diese gehen 2 Ebenen ε' unseres Büschels. Umgekehrt schneidet eine Ebene ε' des Büschels den K_1 in 2 Punkten P', welchen 4 Punkte P auf d zugeordnet sind und nach diesen gehen 4 Ebenen ε des Büschels hin. In diesem Ebenenbüschel entsteht also eine Korrespondenz $[2, 4]$ mit 6 Koinzidenzen. Von den 6 Koinzidenzebenen geht eine nach dem Punkte (d, K_1). Die 5 anderen Koinzidenzen lehren, dass die Geraden p, welche zu den Bildpunkten der Punkte auf d führen, eine Regelfläche 5. Grades

erzeugen und dass die Doppelgerade abgebildet wird in eine Kurve 5. Ordnung.

85. Es ist auch nicht ausnahmslos jeder Punkt der Bildebene eindeutig bestimmt als Bild eines Punktes der Fläche. Der Punkt D ist Bild sämtlicher Punkte derjenigen Raumkurve 6. Ordnung, welche K_1 ergänzt zur vollen Schnittkurve 8. Ordnung zwischen der F_1^4 und dem Kegel, der K_1 von D aus projiziert, und welcher die d doppelt angehört. Ein Spurpunkt Q von K_1 ferner repräsentiert die sämtlichen Punkte desjenigen Kegelschnittes S auf der F_1^4 welcher in die Ebene (d, Q) fällt. Jeder andere Punkt auf der Spurlinie der Ebene von K entspricht dem Punkte der Fläche, in welchem der Strahl von ihm nach dem Punkte (d, K_1) den Ebenengenossen K_1' von K_1 trifft. Die Geraden DQ_1 und DQ_2 bilden sich in ihre vierten Schnittpunkte mit der F_1^4 ab. Die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_8$ endlich stellen je eine Gerade g der Fläche dar, die sich auf K_1 stützt.

Die 8 Geraden g' der Fläche, welche zu K_1 windschief sind, werden dargestellt durch die Geraden $DP_1, DP_2 \ldots DP_8$; denn die Geraden p, welche d und K_1 getrennt treffen und einer g' begegnen, liegen immer in der Ebene (d, g').

So oft eine Kurve der Fläche eine der acht Geraden $g_1 \ldots g_8$, etwa g_i trifft, so oft geht ihre Bildkurve durch den sie darstellenden Punkt P_i, und die letztere begegnet in der Regel einer der Geraden DP_i ebenso oft ausserhalb von D, wie jene auf der Fläche die zugeordnete g_i' trifft; überhaupt entspricht in der Regel einem Begegnungspunkt von zwei Kurven der Fläche ein Schnittpunkt der Bildkurven ausserhalb der Hauptpunkte $D, Q_1, Q_2, P_1 \ldots P_8$ und umgekehrt.

86. Die ∞^3 ebenen Schnitte der Fläche werden dargestellt durch Kurven sechster Ordnung, welche durch D vierfach, durch Q_1, Q_2

doppelt und jeden der Punkte $P_1, \ldots P_8$ einfach hindurchgehen. Die Geraden nämlich, welche einen ebenen Schnitt C_1^4 der Fläche, den Kegelschnitt K_1 und die d in getrennten Punkten treffen, erfüllen eine Fläche sechster Ordnung, wie Satz II lehrt, wenn ich ihn auf eine beliebige Gerade h des Raumes, K_1 und C_1^4 anwende, indem ich $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 4$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = 2$ setze. Auf dieser Fläche liegt C_1^4 einfach, d aber vierfach; denn die Kegel zweiten und vierten Grades, welche K_1 und C_1^4 aus einem auf d gelegenen Punkte P projizieren, haben ausser der Geraden d, welche beziehentlich einfache und doppelte Kante von ihnen ist, und den Kanten, welche nach den beiden Begegnungspunkten von K_1 und C_1^4 hingehen, noch $8-2-2=4$ Kanten gemeinsam, welche K_1 und C_1^4 getrennt treffen. K_1 schliesslich ist Doppelkurve auf unserer Regelfläche, denn die Ebene, welche einen Punkt P von K_1 mit d verbindet, schneidet den Kegel der C_1^4 aus P projiziert ausser in der Doppelkante d des letzteren noch in zwei Kanten, welche K_1 und C_1^4 in verschiedenen Punkten begegnen. Diese Fläche wird daher von der Bildebene in einer Kurve sechster Ordnung geschnitten, welche D zum vierfachen, Q_1 und Q_2 zu doppelten Punkten hat, und durch $P_1 \ldots P_8$ einfach hindurchgeht. In der Tat gibt es umgekehrt auch gerade ∞^3 Kurven sechster Ordnung, welche durch die Punkte D, Q_1, Q_2, $P_1 \ldots P_8$ mit den genannten Vielfachheiten hindurchgehen, denn für die ∞^{27} Kurven sechster Ordnung in der Ebene zählt D für 10, Q_1 und Q_2 für je 3 und $P_1 \ldots P_8$ für im ganzen 8 bestimmende Punkte.

Die ebene Kurve vierter Ordnung auf der Fläche, welche in die Bildebene fällt, bildet sich in sich selbst ab und in die Geraden DQ_1 und DQ_2 welche die Punkte $R_1 R_2$ darstellen.

87. Die Bilder der Schnittkurven eines Ebenenbüschels bilden ein Büschel von Kurven sechster Ordnung, welches D zum vierfachen, Q_1 und Q_2 zu doppelten und diejenigen vier Punkte zu einfachen Grundpunkten hat, welche den vier Schnittpunkten der F_1^4 mit der Achse

des Ebenenbüschels entsprechen. Die Kurven dieses Büschels enthalten nach Cremona[1] $3 \cdot 5^2 = 75$ Doppelpunkte, zu denen aber D für $3 \cdot 13 = 39$ und Q_1, Q_2 für je $1 \cdot 7$ Doppelpunkte zählen[2], sodass unsere Kurven noch $75 - 39 - 14 = 22$ Doppelpunkte ausserhalb der Grundpunkte besitzen müssen. Zu diesen gehören aber auch die Punkte R_1 und R_2. Die Bildkurven der durch diese Punkte gehenden Schnittkurven der F_1^4 sind nämlich Kurven sechster Ordnung, welche in je eine Kurve fünfter Ordnung und eine der Geraden DQ_1, DQ_2 zerfallen und in bezüglich R_1 und R_2 Doppelpunkte besitzen, welche keinen Doppelpunkt der Kurve auf der Fläche repräsentieren. Die übrigen 20 Doppelpunkte auf den Kurven unsres Büschels dagegen sind Bilder von Doppelpunkten der dargestellten Kurven. In 20 Ebenen eines ebenen Büschels hat also die Schnittkurve mit der F_1^4 einen Doppelpunkt d. h. **die Klasse der F_1^4 ist 20.**

Der Rang der F_1^4 ist 10, denn eine ebene Kurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt ist 10. Klasse.

88. Dreifach berührende Ebenen der F_1^4 können ersichtlich nur zustande kommen, wenn die ebene Schnittkurve zerfällt in zwei Kegelschnitte oder in eine Gerade und eine Kurve dritter Ordnung mit einem ausserhalb dieser Geraden und der A gelegenen Doppelpunkte. Ersteres findet 64 mal statt, letzteres in jedem der Ebenenbüschel um die 16 einfachen Geraden g der Fläche 12 mal. Betrachten wir z. B. die Schnittkurven der Ebenen, welche durch eine der zu A_2 windschiefen Geraden, etwa g_1 gehen. Das Büschel der zugehörigen Bildkurven hat dann die Gerade DP_1 als gemeinsamen Bestandteil. Ihre Restkurven 5. Ordnung besitzen in D einen dreifachen und in Q_1, Q_2 doppelte Punkte. Nach Cremona enthalten diese Kurven $3 \cdot 16 = 48$ Doppelpunkte, zu denen D zwanzigfach und Q_1, Q_2 je 7fach zählen. Zu den anderen 14 ge-

1) Vgl. Cremona, Theorie der ebenen Kurven No. 88 Lehrsatz XV.
2) Vgl. Cremona ebendort Zusatz zu No. 88 S. 261.

hören wieder R_1 und R_2. Die übrigen 12 Doppelpunkte auf unseren Kurven stellen ausserhalb der d gelegene Doppelpunkte der ebenen Schnittkurven dar, d. h. es gibt unter den Ebenen des Büschels um eine einfache Gerade der Fläche 12 dreifache Berührungsebenen. Im ganzen hat also die F_1^4 $64 + 16 \cdot 12 = 256$ dreifache Tangentialebenen.

89. Aus den bisherigen Resultaten lässt sich nun auch die Klasse ξ, des Torsus der doppelten Berührungsebenen bestimmen. Da die Klasse der Fläche 20 ist und ihr Rang 10, so bilden die von einem Punkte des Raumes ausgehenden Tangenten der Fläche einen Kegel von der Ordnung 10 und der Klasse 20. Die Zahl seiner Rückkehrerzeugenden ist 18, denn die Anzahl der von einem Punkte P des Raumes an eine Fläche gehenden Oskulierenden ist gleich derjenigen der Punkte, welche diese Fläche mit der ersten und zweiten Polaren von P in bezug auf diese Fläche gemeinsam hat, in unserm Falle also gleich der Zahl derjenigen gemeinsamen Punkte dieser Flächen, welche ausserhalb von d liegen. Die erste Polare in Bezug auf die F_1^4 geht durch die Doppelgerade der Letzteren und schneidet diese also ausserdem noch in einer Kurve 10. Ordnung, welche die zweite Polarfläche in 20 Punkten durchdringt. Von diesen Punkten liegen aber 2 auf d, weil d die 2. Polarfläche, welche doch 2. Ordnung ist, in 2 Punkten durchdringt. Die Zahl der durch P gehenden Oskulierenden ist mithin 18. Mit Hülfe dieser drei Zahlen nämlich der Klasse, des Ranges der Fläche und der zuletzt gefundenen Zahl der Oskulierenden findet man aber auf Grund der Formeln von Plücker für unseren Tangentialkegel als Zahl der Doppelberührungsebenen 113, d. h. der Torsus der doppelten Tangentialebenen einer F_1^4 ist 113. Zu diesem gehören auch die 17 Ebenenbüschel um die Doppelgerade und die 16 einfachen Geraden der Fläche. Die Ebenen, welche die F_1^4 in nicht zerfallenden Kurven 4. Ordnung schneiden, bilden mithin eine abwickelbare Fläche 96. Klasse.

90. Ein Kegelschnitt S wird bei unserer

Abbildung dargestellt durch die Spurlinie seiner Ebene, welche durch D geht, der Genosse K_4' von K_1 bildet sich ab in die Gerade $Q_1 Q_2$. Ein Kegelschnitt K der F_1' ferner, welcher K_1 in α Punkten begegnet, wird repräsentiert durch eine Kurve von der Ordnung $4-\alpha$. Die Geraden nämlich welche d, K_1, K getrennt treffen, erzeugen eine Regelfläche vom Grade $4-\alpha$, wie sich aus Satz I ergibt, wenn man $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = \alpha$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ setzt. Demnach wird ein Kegelschnitt K dargestellt durch eine Kurve vierter, dritter oder zweiter Ordnung je nachdem er sich auf K_1 in 0, 1 oder 2 Punkten stützt. Wie man leicht erkennt, liegt auf der genannten Regelfläche von der Ordnung $4-\alpha$ die d $(3-\alpha)$fach, K_1 und K 1fach. Ist die Bildkurve eine solche 4. Ordnung, welche D zum 3fachen und Q_1, Q_2 zu einfachen Punkten hat, so geht sie durch 6 von den Punkten $P_1 \ldots P_8$. Zu ihren 16 Schnittpunkten mit der Kurve 4. Ordnung C_1' der Fläche welche in die Bildebene fällt und ihre eigene Bildkurve ist, zählt nämlich D 6fach, Q_1, Q_2 und die beiden Begegnungspunkte von K und C_1' je einfach. Die übrigen $16-6-4=6$ müssen also Schnittpunkte von K mit den auf K_1 sich stützenden Geraden darstellen[1]). Umgekehrt ist durch D als dreifachen und Q_1, Q_2 und 6 von den Punkten $P_1 \ldots P_8$ als einfachen Punkten eine Kurve 4. Ordnung eindeutig bestimmt, und ist immer das Bild eines Kegelschnittes K der Fläche, welcher gegen K_1 windschief ist. Die Geraden nämlich, welche eine solche Kurve 4. Ordnung, die d und den Kegelschnitt K_1 in getrennten Punkten treffen, erfüllen eine Regelfläche 4. Grades, welche die d zur 3fachen Geraden hat und durch K_1 und 6 Treffgeraden g des letzteren geht. Ausser in den Linien d, K und den genannten 6 einfachen Geraden, welche insgesamt eine Schnittkurve von der Ordnung $2 \cdot 3 + 2 + 6 = 14$ darstellen, durchdringt diese

1) In der Tat haben 2 zu einander windschiefe Kegelschnitte K 6 Geraden g, die sich auf beide stützen.

Regelfläche unsere F_1^4 noch in einer Kurve zweiter Ordnung. Es ist leicht einzusehen, dass diese nur ein Kegelschnitt K der F_1^4 sein kann, und zwar ein solcher, der zu K_1 windschief ist, da sein Genosse mit K_1 schon 2 Punkte gemeinsam hat. Dieser Genosse nämlich muss die Regelfläche noch zweimal ausserhalb von d und K schneiden, weil er sie auf diesen Linien erst $(3+3)$mal durchdringt und kann das nur auf K_1 tun. Da sich aus 8 Elementen auf 28 verschiedene Weisen 2 herausgreifen lassen, so giebt es 28 Kurven 4. Ordnung von der beschriebenen Art in der Bildebene. Diese stellen die 28 zu K_1 windschiefen Kegelschnitte der F_1^4 dar. Analog findet man: Treffen sich K und K_1 einmal, und ist also die Bildkurve von K eine Kurve 3. Ordnung, welche durch D doppelt und $Q_1 Q_2$ einfach hindurchgeht, so liegen auf dieser noch 4 von den Punkten $P_1 \dots P_8$. Letztere stellt daher immer einen Kegelschnitt dar, welcher sich auf 4 Treffgerade von K_1 stützt. Die 70 Kurven 3. Ordnung dieser Art in der Bildebene repräsentieren die 70 Kegelschnitte K auf der F_1^4 welche K_1 einmal begegnen. Schliesslich finden wir als Bilder der 28 Kegelschnitte K, welche K_1 zweimal schneiden die 28 Kurven 2. Ordnung in der Bildebene, welche durch D, Q_1, Q_2 und je zwei von den Punkten $P_1 \dots P_8$ bestimmt sind.

91. Wir wollen noch eine einfachere Abbildung herstellen. Wir bilden die Bildebene mittels einer quadratischen Transformation auf eine andere Ebene ab. Zu Hauptpunkten in der ersteren Ebene wähle ich D, Q_1, Q_2. Die Geraden g, welche sich auf K_1 stützen, werden auch in der zweiten Bildebene durch Punkte dargestellt, nämlich die Punkte $P_1' \cdots P_8'$, welche den Punkten $P_1 \cdots P_8$ entsprechen, und ihre Genossinnen durch die Verbindungeraden der genannten Punkte mit D'. Auch hier geht die Bildkurve ebenso oft durch einen Punkt P_i' als die dargestellte Kurve auf der Fläche die Gerade g_i trifft, und auch hier entspricht einem Schnittpunkt der Flächenkurve mit einer g_i' ein ausserhalb von P_i' gelegener Schnittpunkt von $D'P_i'$ mit der Bildkurve und allgemein einem Begegnungspunkt

von 2 Kurven auf der Fläche ein Schnittpunkt der Bildkurven ausserhalb der Hauptpunkte und umgekehrt. Die zu D, Q_1, Q_2 homologen Hauptpunkte der 2. Ebene mögen D', Q_1', Q_2' heissen. Der Kurve 6. Ordnung im 1. Felde, welche D zum 4fachen, Q_1, Q_2 zu doppelten und $P_1 \cdots P_8$ zu einfachen Punkten hat, entspricht dann im neuen Felde eine Kurve 4. Ordnung, welche durch D' doppelt geht, durch Q_1', Q_2' garnicht und durch die 8 Punkte $P_1' \cdots P_8'$, welche den Punkten $P_1 \cdots P_8$ zugeordnet sind, einfach. Die Abbildung der Fläche auf eine Ebene mit einem 4fachen, 2 doppelten und 8 einfachen Punkten für die Bilder der ebenen Schnitte ist durch die quadratische Verwandschaft also umgewandelt in eine solche mit einem doppelten und 8 einfachen Punkten, und die Ordnung der Bildkurven wird dadurch teilweise erheblich erniedrigt.

Die Schnittkurve der F_1^4 mit der ersten Bildebene, welche in dieser durch sich selbst und die Geraden DQ_1, DQ_2, als Bildern von R_1, R_2, dargestellt wird, ist in der neuen Ebene repräsentiert durch eine Kurve 4ter Ordnung, welche durch D' doppelt und Q_1', Q_2' einfach hindurchgeht. Mittels unserer Abbildung können wir dann auch die sämtlichen uns schon bekannten Kurven auf der F_1^4 nachweisen.

Die Raumkurven 3ter Ordnung R^3 z. B. auf der F_1^4, welche sich auf die d je einmal stützen, können K_1, $0-$, $1-$, $2-$ oder 3 mal treffen. Ist α die Anzahl der Begegnungspunkte einer solchen R^3 mit K_1, so bilden die Geraden, welche R^3, K_1 und d getrennt begegnen, eine Regelfläche vom Gerade $7-\alpha$, auf welcher R^3 einfach, K_1 doppelt und d $(5-\alpha)$fach liegt.

Die 448 kubischen Raumkurven R^3 auf der F_1^4 werden also in der ersten Bildebene dargestellt durch die 56, 168, 168, 56 Kurven 7., 6., 5., 4. Ordnung, welche bestimmt sind durch D als beziehentlich 5-, 4-, 3-, 2-fachen, Q_1, Q_2 als doppelte, 5 von den 8 Punkten $P_1 \cdots P_8$ als einfache und die übrigen 3 von dieser als doppelte Punkte.

Wir haben oben gefunden, dass ein Kegelschnitt K und eine R^3 der Fläche sich in $3-\alpha$ Punkten, treffen, wenn sich K auf α von den $g^{(2)}$ der R^3 stützt. Hieraus folgt sofort die Umkehrung: Haben ein K und eine R^3 α Punkte gemeinsam, so stützt sich K auf $3-\alpha$ von den $g^{(2)}$ der R^3 d. h. es sind $(3-\alpha)$, α, 5 von den 8 Geraden, welche K treffen, beziehentlich $g^{(2)}$, $g^{(0)}$, $g^{(1)}$ für die R^3. Dieses findet auch in der Abbildung seine Bestätigung:

Da nämlich bei α Schnittpunkten von K_1 und R^3 die Bildkurve der letzteren von der Ordnung $7-\alpha$ ist mit D als $(5-\alpha)$-fachen Q_1, Q_2 als doppelten Punkten, so liegen von den $4\cdot(7-\alpha)$ Schnittpunkten dieser Kurve mit der in der Bildebene gelegenen Schnittkurve der F_1^4 $2\cdot(5-\alpha)$ in D, $2\cdot 2$ in Q_1, Q_2 und 5 in denjenigen von den Punkten $P_1\cdots P_8$, welche die R^3 zu einfachen hat. Von den anderen $4\cdot(7-\alpha)-2\cdot(5-\alpha)-4-5=9-2\alpha$ Punkten sind 3 die Spurpunkte der R^3 in der Bildebene. Die übrigen $6-2\alpha=2(3-\alpha)$ Punkte müssen also in den übrigen 3 Hauptpunkten liegen, und das ist nur möglich, wenn die Bildkurve durch $3-\alpha$ von ihnen doppelt hindurchgeht und daher eine R^3 darstellt, welche $3-\alpha$ von den Geraden g, welche sich auf K_1 stützen zu Doppelsekanten hat.

Durch die quadratische Transformation gehen die besprochenen Bildkurven über in die 56, 168, 168, 56 Kurven 5., 4., 3., 2. Ordnung, welche bestimmt sind durch D' als beziehentlich 3-, 2-, 1-, 0-fachen Punkt, 5 von den Punkten $P_1'\cdots P_8'$ als einfache und beziehentlich 3, 2, 1, 0 der übrigen als doppelte Punkte.

92. Auch das Verhalten der Flächenkurven zu einander bezüglich ihrer Schnittpunkte kann man mit Hülfe der Abbildung studieren.

Betrachten wir z. B. die R^3, welche abgebildet wird in die durch D' 3fach, durch P_1', P_2', P_3', P_4', P_5' einfach und P_6', P_7', P_8' doppelt gehende Kurve 5ter Ordnung C_5 so erkennen wir zunächst, dass die R^3 zu $g^{(2)}$ hat die Geraden g_6, g_7, g_8 und zu $g^{(1)}$ die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5. Die Paargenossinnen der letzteren sind ihre übrigen $g^{(1)}$.

Die g_1' z. B. trifft unsere R^3 einmal, denn die C^5 begegnet der Geraden $D'P_1'$ erst dreimal in D' und einmal in P_1', also noch einmal ausserhalb der Fundamentalpunkte.

Schliesslich will ich die Abbildung noch verwenden zur Bestimmung der Sätze 2) und 4) im § 8, soweit sie sich auf das Verhalten von zwei R^3 beziehen, welche 4 $g^{(1)}$-Paare gemeinsam haben. Ich gehe wieder aus von der obigen R^3, welche die beschriebene C^5 zur Bildkurve hat. Die Kurven R^3, welche mit dieser R^3 in 4 $g^{(1)}$-Paaren übereinstimmen, können nur dargestellt werden durch Kurven 5., 4., 3., 2. Ordnung der angeführten Art, die durch 4 von den 5 Punkten $I_1', I_2', I_3', I_4', I_5'$ einfach hindurchgehen, und haben mit der ersten R^3 ebenso viele $g^{(2)}$ gemeinsam, als ihre Bildkurven mit der besprochenen C^5 in P_6', P_7', P_8' gemeinsame Doppelpunkte besitzen. Die sämtlichen Kurven, welche diese Bedingungen erfüllen, erhalten wir in folgender Weise:

1) Es gibt $3 \cdot 5$ Kurven 5ter Ordnung, welche D' zu einem 3fachen und 4 von den Punkten $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'$ zu einfachen Punkten haben. Sie gehen durch den 5ten von ihnen und 2 von den 3 übrigen Fundamentalpunkten doppelt und durch den letzten einfach. Sie treffen die gegebenen C^5 ausserhalb der Fundamentalpunkte gar nicht, da diese schon für 25 Schnittpunkte zählen, und stellen also 15 R^3 dar, welche zu der gegebenen windschief sind und mit ihr 2 $g^{(2)}$ gemeinsam haben.

2) $5 \cdot 3$ Kurven 4. Ordnung gehen doppelt durch D', einfach durch 4 von den Punkten $P_1', P_2', P_3', P_4', I_5'$, doppelt durch 2 von den 3 übrigen Fundamentalpunkten und einfach durch den dritten von diesen letzteren. Sie begegnen der gegebenen C^5 ausserhalb der Fundamentalpunkte nicht, da diese schon für 20 Schnittpunkte zählen.

3) $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ Kurven 4. Ordnung sind bestimmt durch D' als doppelten, 4 von den Punkten $P_1', I_2', I_3', I_4', I_5'$ als einfache, den 5. von ihnen als doppelten und je einen unter den 3 übrigen als doppelten und einfachen Punkt. Von ihren 20 Begegnungspunkten mit der C^5 liegen 18 in den Fundamentalpunkten und daher 2 ausser-

halb derselben. Sie repräsentieren mithin 30 R^3, welche mit der gegebenen 2 Punkte und eine $g^{(1)}$ gemeinsam haben.

4) $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ Kurven 3ter Ordnung haben D' und 4 von den Punkten P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5 als einfache und je einen unter den Punkten P'_6, P'_7, P'_8 als einfachen und doppelten Punkt. Sie schneiden die C^5 13mal in den Fundamentalpunkten und mithin 2mal ausserhalb derselben und stellen 30 R^3 dar, die mit der gegebenen 2 Punkte und eine $g^{(2)}$ gemeinsam haben.

5) $5\ 3 = 15$ kubische Kurven gehen einfach durch D', 4 von den Punkten P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5 und einen der übrigen Fundamentalpunkte, doppelt durch den 5ten von den ersteren 5. Sie begegnen der C^5 in den Fundamentalpunkten 11mal, also ausserhalb derselben 4mal. Es gibt somit 15 R^3, die mit der gegebenen 4 Punkte und keine $g^{(2)}$ gemeinsam haben.

6) $5 \cdot 3 = 15$ Kegelschnitte sind bestimmt durch 4 von den Punkten P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5 und einen der 3 übrigen Fundamentalpunkte P. Ausserhalb derselben begegnen sie der C^5 noch 4mal. Diese Kurven stellen 15 R^3 dar, welche mit der gegebenen 4 Punkte und keine $g^{(2)}$ gemeinsam haben.

Unter 1), 2); 3), 4); 5), 6) haben wir 30; 60; 30 Kurven R^3 gefunden, welche mit der gegebenen in 4 Paaren $g^{(1)}$ und in beziehentlich 2, 1, 0 $g^{(2)}$ übereinstimmen und diese in beziehentlich 0, 2, 4 Punkten treffen. Damit haben wir also die Richtigkeit von Satz 3) bewiesen.

93. Zu derselben Abbildung der Fläche auf eine Ebene mit 8 einfachen und einem doppelten Fundamentalpunkt gelangt Clebsch gleichfalls mit Hülfe der Geraden p, welche d und K_1 getrennt treffen. Er bringt diese aber nicht selbst mit der Bildebene zum Schnitt, sondern projiziert sie auf diese aus einem Punkte O von K_1. Die Projektion der Geraden p nennt er das Bild des 4. Schnittpunktes dieser Geraden mit der Fläche. So bildet er also die Punkte der Fläche ab in Gerade der Bildebene. Durch Anwendung einer Korrelation indessen bildet er die Bild-

ebene auf eine andere Ebene ab, sodass in dieser einem Punkt der Fläche auch wieder ein Punkt entspricht und umgekehrt.

Die 8 anderen Geraden g', welche K_1 nicht treffen, werden dargestellt durch 8 Strahlenbüschel, deren Scheitel die Projektionen der 2. Schnitte der 8 Ebenen (d, g_1) mit K_1 aus 0 sind und daher auf der Spurlinie s der Ebene von K_1 liegen. Jener Punkt auf K_1 ist der Stützpunkt der jeweilig gepaarten Geraden g auf K_1. Daher gehört deren Bild zum Büschel. In der zweiten Ebene sind deshalb die Bilder der g' diejenigen Geraden, welche in einem Punkte S' zusamenlaufen und beziehungsweise durch die Bilder $P_1' \ldots P_8'$ der Geraden g gehen.

Ein ebener Schnitt der F_1^4 wird auch wieder durch eine Kurve 4. Ordnung dargestellt, welche den doppelten Fundamentalpunkt zum Doppelpunkt hat und durch die einfachen einfach hindurchgeht. Die Geraden nämlich, welche d, K_1 und diese Kurve 4. Ordnung getrennt treffen, bilden, wie wir oben gefunden haben, eine Regelfläche 6 Ordnung, auf welcher d vierfach, K_1 doppelt und die biquadratische Kurve einfach liegt. Die Ebenen also, welche die Erzeugenden dieser Fläche aus 0 projizieren, umhüllen einen Kegel 6. Klasse. Diesem gehören aber, da K_1 Doppelkurve der Regelfläche ist, die beiden Ebenenbüschel um die von 0 ausgehenden Erzeugenden der Regelfläche ab. Der übrig bleibende Kegel 4. Klasse schneidet die erste Bildebene in einer Kurve 4. Klasse, welche die Geraden $p_1, p_2 \ldots p_8$ einfach und die s doppelt berührt. Ersteres ist evident. Letzteres ist aber auch leicht einzusehen. Für die weiteren Schnittpunkte der C_1^4 mit der Ebene von K_1 fallen nämlich die zugehörigen p in diese Ebene und ihre Projektionen in die s. Diese Gerade ist daher Doppeltangente der Bildkurve. In dem 2. Felde wird also ein ebener Schnitt dargestellt, durch eine Kurve von der beschriebenen Art.

Wir bekommen mithin auch auf diese Weise eine Abbildung derselben Art mit 8 einfachen und einem doppelten Fundamentalpunkt. Wir erhalten dieselbe Abbildung. So

werden z. B. die kubischen Raumkurven R^3 auf der Fläche auch durch Kurven 5., 4., 3. und 2. Ordnung von der oben beschriebenen Beschaffenheit dargestellt. Denn die Geraden, welche d, K_1 und eine solche R^3 in verschiedenen Punkten begegnen, erfüllen, wie wir auch schon oben erkannten, eine Regelfläche vom Grade $7-\alpha$ mit K_1 als Doppelkurve. Die Ebenen also, welche die Erzeugenden dieser Fläche aus einem Punkte des Raumes projizieren, umhüllen einen Kegel $(7-\alpha)^{\text{ter}}$ Klasse. Hier spalten sich wieder wie oben 2 Ebenenbüschel ab. Es verbleibt ein Kegel von der Klasse $5-\alpha$, welcher die erste Ebene in einer Kurve $(5-\alpha)^{\text{ter}}$ Klasse schneidet. Dieser entspricht eine Kurve $(5-\alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung d. h. also eine Kurve 5., 4., 3., 2. Ordnung.

Literatur.

R. Sturm: Mathematische Annalen, Band 4, Seite 249 ff. Leipzig 1871.

A. Clebsch: Mathematische Annalen, Band 1, Seite 253 ff. Leipzig 1869.

R. Sturm: Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. Leipzig 1893.

R. Sturm: Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. Leipzig 1867.

L. Cremona, Deutsch von Curtze: Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven. Greifswald 1865.

L. Cremona, Deutsch von Curtze: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung. Berlin 1870.

Lebenslauf.

Ich, Fritz Zimmermann, Sohn des Gymnasialoberlehrers a. D. Professor A. Zimmermann, evangelischer Konfession, bin geboren zu Posen am 6. Juni 1879. Ich besuchte in Posen die Vorschule des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums und dann ebenda von Ostern 1889 ab die Sexta bis Unter-Tertia des Marien-Gymnasiums. Oktober 1892 siedelte ich mit meinem Vater nach Celle über und besuchte dort das Gymnasium, bis ich Ostern 1897 meinem Vater nach Breslau folgte, um die Oberprima des König-Wilhelm-Gymnasiums zu besuchen. Ich verliess dasselbe Ostern 1898 mit dem Reifezeugnis und studierte an der hiesigen Universität 9 Semester lang Mathematik, Physik und Philosophie. Am 28. Januar 1903 bestand ich die Doktorprüfung. Meine Lehrer waren folgende Herren Professoren und Dozenten, denen ich zu grossem Danke verpflichtet bin:

H. Cohn, H. Ebbinghaus, J. Franz, J. Freudenthal, Heydweiller, W. Kükenthal, F. London, O. E. Meyer, J. Rosanes, W. Stern, R. Sturm, G. Thilenius.

Besondere Förderung verdanke ich Herrn Geheimrat Professor Dr. Sturm, namentlich bei Anfertigung meiner Arbeit.

Thesen.

1) Wegen ihrer Anschaulichkeit sind für Eigenschaften geometrischer Gebilde die rein geometrischen Beweise den analytischen vorzuziehen.

2) Die mathematische Bezeichnung „allgemein“ für Kurven, Flächen, Systeme von Punkten, Kurven und Flächen ist zu vermeiden.

3) Der indirekte Beweis ist dem direkten nicht nachzusetzen.

Die Hauptoktupel.

O_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	g'_5	g'_6	g'_7	g'_7	O'_1
O_2	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g'_7	g'_8	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	g'_5	g'_6	g_7	g_8	O'_2
O_3	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g'_6	g_7	g'_9	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	g'_5	g_6	g'_7	g_8	O'_3
O_4	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g'_6	g'_7	g_8	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	g'_5	g_6	g_7	g'_8	O'_4
O_5	g_1	g_2	g_3	g_4	g'_5	g_6	g_7	g'_8	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	g_5	g'_6	g'_7	g_8	O'_5
O_6	g_1	g_2	g_3	g_4	g'_5	g_6	g'_7	g_8	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	g_5	g'_6	g_7	g'_8	O'_6
O_7	g_1	g_2	g_3	g'_4	g_5	g_6	g_7	g'_8	g'_1	g'_2	g'_3	g_4	g'_5	g'_6	g'_7	g_8	O'_7
O_8	g_1	g_2	g_3	g'_4	g_5	g_6	g'_7	g_8	g'_1	g'_2	g'_3	g_4	g'_5	g'_6	g_7	g'_8	O'_8
O_9	g_1	g_2	g'_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g'_8	g'_1	g'_2	g_3	g'_4	g'_5	g'_6	g'_7	g_8	O'_9
O_{10}	g_1	g_2	g'_3	g_4	g_5	g_6	g'_7	g_8	g'_1	g'_2	g_3	g'_4	g'_5	g'_6	g_7	g'_8	O'_{10}
O_{11}	g_1	g'_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g'_8	g'_1	g_2	g'_3	g'_4	g'_5	g'_6	g'_7	g_8	O'_{11}
O_{12}	g_1	g'_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g'_7	g_8	g'_1	g_2	g'_3	g'_4	g'_5	g'_6	g_7	g'_8	O'_{12}
O_{13}	g'_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g'_8	g_1	g'_2	g'_3	g'_4	g'_5	g'_6	g'_7	g_8	O'_{13}
O_{14}	g'_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g'_7	g_8	g_1	g'_2	g'_3	g'_4	g'_5	g'_6	g_7	g'_8	O'_{14}
O_{15}	g_1	g_2	g_3	g_4	g'_5	g'_6	g_7	g_8	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	g_5	g_6	g'_7	g'_8	O'_{15}
O_{16}	g_1	g_2	g_3	g'_4	g_5	g'_6	g_7	g_8	g'_1	g'_2	g'_3	g_4	g'_5	g_6	g'_7	g'_8	O'_{16}
O_{17}	g_1	g_2	g'_3	g_4	g_5	g'_6	g_7	g_8	g'_1	g'_2	g_3	g'_4	g'_5	g_6	g'_7	g'_8	O'_{17}
O_{18}	g_1	g'_2	g_3	g_4	g_5	g'_6	g_7	g_8	g'_1	g_2	g'_3	g'_4	g'_5	g_6	g'_7	g'_8	O'_{18}
O_{19}	g'_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g'_6	g_7	g_8	g_1	g'_2	g'_3	g'_4	g'_5	g_6	g'_7	g'_8	O'_{19}
O_{20}	g_1	g_2	g_3	g'_4	g'_5	g_6	g_7	g_8	g'_1	g'_2	g'_3	g_4	g_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{20}
O_{21}	g_1	g_2	g'_3	g_4	g'_5	g_6	g_7	g_8	g'_1	g'_2	g_3	g'_4	g_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{21}
O_{22}	g_1	g'_2	g_3	g_4	g'_5	g_6	g_7	g_8	g'_1	g_2	g'_3	g'_4	g_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{22}
O_{23}	g'_1	g_2	g_3	g_4	g'_5	g_6	g_7	g_8	g_1	g'_2	g'_3	g'_4	g_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{23}
O_{24}	g_1	g_2	g'_3	g'_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g'_1	g'_2	g_3	g_4	g'_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{24}
O_{25}	g_1	g'_2	g_3	g'_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g'_1	g_2	g'_3	g_4	g'_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{25}
O_{26}	g'_1	g_2	g_3	g'_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_1	g'_2	g'_3	g_4	g'_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{26}
O_{27}	g_1	g'_2	g'_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g'_1	g_2	g_3	g'_4	g'_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{27}
O_{28}	g'_1	g_2	g'_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_1	g'_2	g_3	g'_4	g'_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{28}
O_{29}	g'_1	g'_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_1	g_2	g'_3	g'_4	g'_5	g'_6	g'_7	g'_8	O'_{29}
O_{30}	g_1	g_2	g_3	g_4	g'_5	g'_6	g'_7	g'_8	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	g_5	g_6	g_7	g_8	O'_{30}
O_{31}	g_1	g_2	g_2	g'_4	g_5	g'_6	g'_4	g'_8	g'_1	g'_2	g'_3	g_4	g'_5	g_6	g_7	g_8	O'_{31}
O_{32}	g_1	g_2	g'_3	g_4	g_5	g'_6	g'_7	g'_8	g'_1	g'_2	g_3	g'_4	g'_5	g_6	g_7	g_8	O'_{32}
O_{33}	g_1	g'_2	g_3	g_4	g_5	g'_6	g'_7	g'_8	g'_1	g_2	g'_3	g'_4	g'_5	g_6	g_7	g_8	O'_{33}
O_{34}	g'_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g'_6	g'_7	g'_8	g_1	g'_2	g'_3	g'_4	g'_5	g_6	g_7	g_8	O'_{34}
O_{35}	g_1	g_2	g_3	g'_4	g'_5	g_6	g'_7	g'_8	g'_1	g'_2	g'_3	g_4	g_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{35}
O_{36}	g_1	g_2	g'_3	g_4	g'_5	g_6	g'_7	g'_8	g'_1	g'_2	g_3	g'_4	g_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{36}
O_{37}	g_1	g'_2	g_3	g_4	g'_5	g_6	g'_7	g'_8	g'_1	g_2	g'_3	g'_4	g_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{37}
O_{38}	g'_1	g_2	g_3	g_4	g'_5	g_6	g'_7	g'_8	g_1	g'_2	g'_3	g'_4	g_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{38}
O_{39}	g_1	g_2	g'_3	g'_4	g_5	g_6	g'_7	g'_8	g'_1	g'_2	g_3	g_4	g'_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{39}
O_{40}	g_1	g'_2	g_3	g'_4	g_5	g_6	g'_7	g'_8	g'_1	g_2	g'_3	g_4	g'_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{40}
O_{41}	g'_1	g_2	g_3	g'_4	g_5	g_6	g'_7	g'_8	g_1	g'_2	g'_3	g_4	g'_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{41}
O_{42}	g_1	g'_2	g'_3	g_4	g_5	g_6	g'_7	g'_8	g'_1	g_2	g_3	g'_4	g'_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{42}
O_{43}	g'_1	g_2	g'_3	g_4	g_5	g_6	g'_7	g'_8	g_1	g'_2	g_3	g'_4	g'_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{43}
O_{44}	g'_1	g'_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g'_7	g'_8	g_1	g_2	g'_3	g'_4	g'_5	g'_6	g_7	g_8	O'_{44}
O_{45}	g_1	g_2	g_3	g'_4	g'_5	g'_6	g_7	g'_8	g'_1	g'_2	g'_3	g_4	g_5	g_6	g'_7	g_8	O'_{45}
O_{46}	g_1	g_2	g_3	g'_4	g'_5	g'_6	g'_7	g_8	g'_1	g'_2	g'_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g'_8	O'_{46}
O_{47}	g_1	g_2	g'_3	g_4	g'_5	g'_6	g_7	g'_8	g'_1	g'_2	g_3	g'_4	g_5	g_6	g'_7	g_8	O'_{47}
O_{48}	g_1	g_2	g'_3	g_4	g'_5	g'_6	g'_7	g_8	g'_1	g'_2	g_3	g'_4	g_5	g_6	g_7	g'_8	O'_{48}
O_{49}	g_1	g'_2	g_3	g_4	g'_5	g'_6	g_7	g'_8	g'_1	g_2	g'_3	g'_4	g_5	g_6	g'_7	g_8	O'_{49}
O_{50}	g_1	g'_2	g_3	g_4	g'_5	g'_6	g'_7	g_8	g'_1	g_2	g'_3	g'_4	g_5	g_6	g_7	g'_8	O'_{50}
O_{51}	g'_1	g_2	g_3	g_4	g'_5	g'_6	g_7	g'_8	g_1	g'_2	g'_3	g'_4	g_5	g_6	g'_7	g_8	O'_{51}
O_{52}	g'_1	g_2	g_3	g_4	g'_5	g'_6	g'_7	g_8	g_1	g'_2	g'_3	g'_4	g_5	g_6	g_7	g'_8	O'_{52}
O_{53}	g_1	g_2	g'_3	g'_4	g_5	g'_6	g_7	g'_8	g'_1	g'_2	g_3	g_4	g'_5	g_6	g'_7	g_8	O'_{53}
O_{54}	g_1	g_2	g'_3	g'_4	g_5	g'_6	g'_7	g_6	g'_1	g'_2	g_3	g_4	g'_5	g_6	g_7	g'_8	O'_{54}
O_{55}	g_1	g'_2	g_3	g'_4	g_5	g'_6	g_7	g'_8	g'_1	g_2	g'_3	g_4	g'_5	g_6	g'_7	g_8	O'_{55}
O_{56}	g_1	g'_2	g_3	g'_4	g_5	g'_6	g'_7	g_8	g'_1	g_2	g'_3	g_4	g'_5	g_6	g_7	g'_8	O'_{56}
O_{57}	g'_1	g_2	g_3	g'_4	g_5	g'_6	g_7	g'_8	g_1	g'_2	g'_3	g_4	g'_5	g_6	g'_7	g_8	O'_{57}
O_{58}	g'_1	g_2	g_3	g'_4	g_5	g'_6	g'_7	g_8	g_1	g'_2	g'_3	g_4	g'_5	g_6	g_7	g'_8	O'_{58}
O_{59}	g_1	g_2	g'_3	g'_4	g'_5	g_6	g_7	g'_8	g'_1	g'_2	g_3	g_4	g_5	g'_6	g'_7	g_8	O'_{59}
O_{60}	g_1	g_2	g'_3	g'_4	g'_5	g_6	g'_7	g_3	g'_1	g'_2	g_3	g_4	g_5	g'_6	g_7	g'_8	O'_{60}
O_{61}	g_1	g'_2	g_3	g'_4	g'_5	g_6	g_7	g'_8	g'_1	g_2	g'_3	g_4	g_5	g'_6	g'_7	g_8	O'_{61}
O_{62}	g_1	g'_2	g_3	g'_4	g'_5	g_6	g'_7	g_8	g'_1	g_2	g'_3	g_4	g_5	g'_6	g_7	g'_8	O'_{62}
O_{63}	g'_1	g_2	g_3	g'_4	g'_5	g_6	g_7	g'_8	g_1	g'_2	g'_3	g_4	g_5	g'_6	g'_7	g_8	O'_{63}
O_{64}	g'_1	g_2	g_3	g'_4	g'_5	g_6	g'_7	g_8	g_1	g'_2	g'_3	g_4	g_5	g'_6	g_7	g'_8	O'_{64}